

Transferencia de Calor por Convección

La transferencia de calor por convección involucra el intercambio de energía entre un fluido y una superficie. Existe la convección libre o natural, en la que los cambios de densidad provocan el movimiento natural del fluido; y convección forzada en la que el fluido es forzado a moverse sobre la superficie de contacto.

$$Q = h A (T_o - T_b)$$

A = área normal a la dirección de flujo de calor.

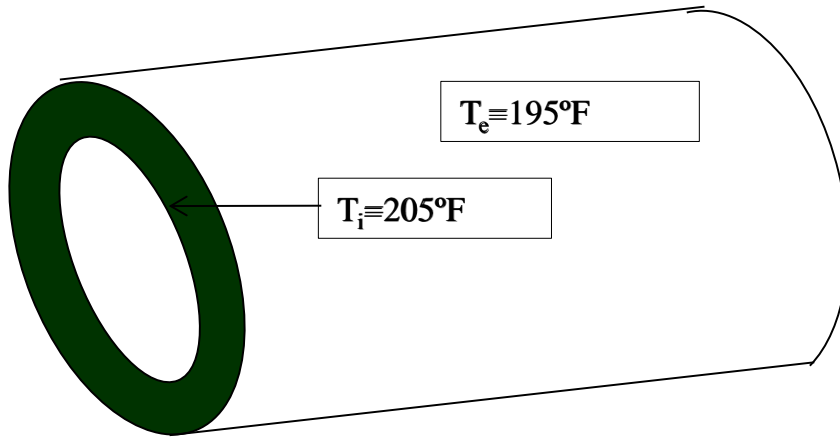
h = Coeficiente de superficie de transferencia de calor.

$T_o - T_b$ = Fuerza motriz para la transferencia de calor. Determina en qué dirección se da el flujo de calor ($T_b - T_o$).

Dada la naturaleza de la transferencia, el flujo de calor casi no se escribe en forma vectorial. Igualmente deben incluirse los efectos de flujo del fluido.

Mecanismo	h (Btu/hr·ft ² ·°F)
Vapor (condensación)	1,000 – 20,000
Agua hirviendo	500 – 5,000
Agua, conv. Forzada	50 – 3,000
Aire, convección forzada	5 – 100
Aire, convección libre	1 – 10

Hay vapor a 210°F transportado en un tubo de acero de $1\frac{1}{2}$ in calibre 80 de acero suave. Las temperaturas de las paredes interior y exterior son 205°F y 195°F , respectivamente. El aire que rodea al tubo está a 10°F . Encontrar a) pérdida de calor por 10 ft de tubo, b) flujo de calor en base a las áreas de superficie interna y externa, c) los coeficientes de transferencia de calor convectiva en ambas superficies del tubo.



$$Q_r = -kA \frac{dT}{dr}$$

Tomando el área $A = 2\pi rL$ nos queda

$$Q_r = -k(2\pi rL)dT/dr$$

$$Q_r = -\frac{2\pi kL}{\ln \frac{r_e}{r_i}} (T_1 - T_2)$$

Para el acero suave $k=24.8 \text{ Btu/hr}\cdot\text{ft}\cdot^{\circ}\text{F}$ y para tubo 1.5 in cal. 80 $D_e=1.9$ in y $D_i=1.5$ in

$$Q_r = \frac{2\pi(24.8 \text{ Btu/hr}\cdot\text{ft}\cdot^{\circ}\text{F})(10 \text{ ft})(10^{\circ}\text{F})}{\ln \frac{1.9}{1.5}} = 65918 \text{ Btu/hr}$$

Las áreas interior y exterior son:

$$A_i = \pi(1.5/12 \text{ ft})(10 \text{ ft}) = 3.93 \text{ ft}^2$$

$$A_e = \pi(1.9/12 \text{ ft})(10 \text{ ft}) = 4.97 \text{ ft}^2$$

Por lo que los flujos son:

$$Q_r/A_i = 65918/3.93 = 16773 \text{ Btu/hr}\cdot\text{ft}^2$$

$$Q_r/A_e = 65918/4.98 = 13236 \text{ Btu/hr}\cdot\text{ft}^2$$

$$h_v = \frac{Q/A}{(T_v - T_{Pi})} = \frac{16,773 \text{ Btu} / \text{hr} \cdot \text{ft}^2}{5^\circ \text{F}} = 3,354 \text{ Btu} / \text{hr} \cdot \text{ft}^2 \cdot ^\circ \text{F}$$

$$h_{aire} = \frac{Q/A}{(T_{Pe} - T_{aire})} = \frac{13,236}{195 - 10} = 71 \text{ Btu} / \text{hr} \cdot \text{ft}^2 \cdot ^\circ \text{F}$$

El análisis de problemas de transferencia de calor convectivo debe ser abordado inicialmente con la ecuación de transferencia general tomando en cuenta todas las posibles simplificaciones de forma.

Procedimiento de solución de problemas:

1. Elaborar un esquema del problema.
2. Determinar, a partir del enunciado, si el fluido es incompresible ($\nabla \cdot \mathbf{U} = 0$) y qué propiedades físicas se pueden considerar constantes.
3. Identificar el sistema de coordenadas que mejor describe el transporte.
4. Determine qué componentes de la velocidad son cero. ($v_x, v_y, v_z, v_r, v_\theta, v_\phi$)
5. Determine qué gradientes de velocidad son cero.
6. Escriba las ecuaciones diferenciales aplicables eliminando los términos iguales a cero.
7. Determine las condiciones de frontera a partir del enunciado del problema.
8. Si el número de variables excede a las ecuaciones, es necesario formular ecuaciones constitutivas adicionales a partir de condiciones conocidas (cinética, estequiometría, props. físicas, etc.) hasta tener igual número de ecuaciones.
9. Integre las ecuaciones analíticamente o numéricamente para obtener la solución.

La ecuación de balance de energía

$$\frac{\partial(\rho C_p T)}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)(\rho C_p T) = \dot{q}_G + [\nabla \cdot \alpha \nabla(\rho C_p T)] - (\rho C_p T)(\nabla \cdot \mathbf{v})$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\dot{q}_G}{\rho C_p} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\alpha \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\alpha \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\alpha \frac{\partial T}{\partial z} \right)$$

TABLE 5.6
The energy equation

General equation

$$\frac{\partial(\rho c_p T)}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla)(\rho c_p T) = \dot{T}_G + [\nabla \cdot \alpha \nabla(\rho c_p T)] - (\rho c_p T)(\nabla \cdot \mathbf{U}) \quad (5.13)$$

Incompressible media, rectangular coordinates

$$\frac{\partial T}{\partial t} + U_x \frac{\partial T}{\partial x} + U_y \frac{\partial T}{\partial y} + U_z \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\dot{T}_G}{\rho c_p} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\alpha \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\alpha \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\alpha \frac{\partial T}{\partial z} \right) \quad (A)$$

Incompressible media, cylindrical coordinates

$$\frac{\partial T}{\partial t} + U_r \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{U_\theta}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} + U_z \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\dot{T}_G}{\rho c_p} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \alpha \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\alpha \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\alpha \frac{\partial T}{\partial z} \right) \quad (B)$$

Incompressible media, spherical coordinates

$$\frac{\partial T}{\partial t} + U_r \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{U_\theta}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{U_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial T}{\partial \phi} = \frac{\dot{T}_G}{\rho c_p} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \alpha \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\alpha \sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\alpha \frac{\partial T}{\partial \phi} \right) \quad (C)$$

Ejemplo

Considere un bloque de cobre sujeto a una diferencia de temperatura desde la cara en $x=0$ hasta la cara en $x=10$ cm. Todas las otras superficies están aisladas. Derive la ecuación de transferencia de calor aplicable.

La figura muestra un problema típico de flujo laminar con transferencia de calor. El tubo es de área seccional uniforme, tal que el flujo es unidireccional. Establezca una ecuación diferencial que describa el perfil de temperatura si el flujo está en estado estable e incompresible.

Solución:

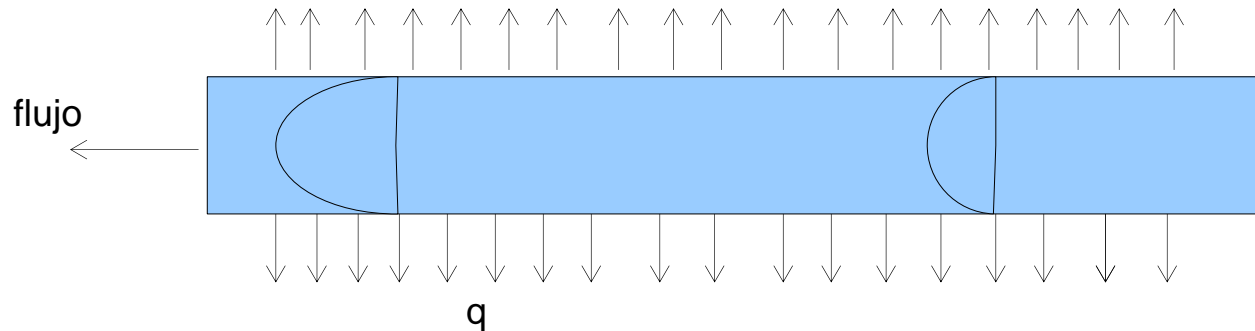
Se escogen coordenadas cilíndricas para describir la distribución de temperaturas a lo largo del tubo. Solamente v_z no es igual a cero.

Como el flujo está en estado estable: $\partial T / \partial t = 0$.

La temperatura cambia con r y z , pero no en la dirección θ . No hay generación viscosa de calor si se supone un fluido como agua, aceite, gases, etc., de modo que $q_g = 0$.

Sustituyendo estas relaciones en la ecuación general se tiene:

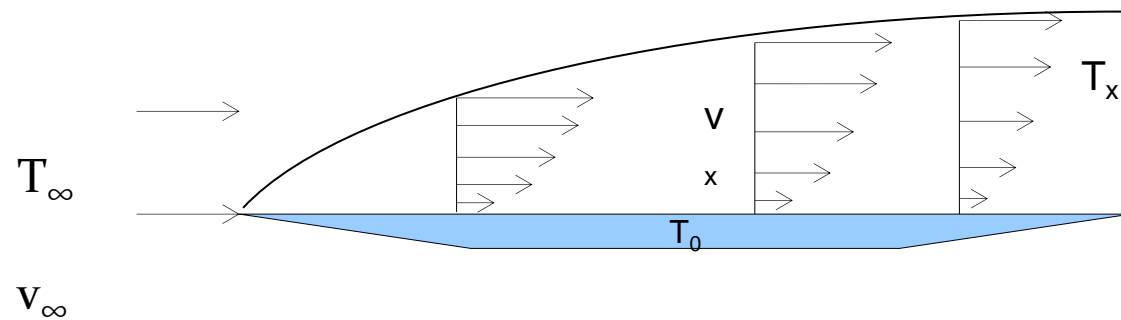
$$v_z \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \alpha \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\alpha \frac{\partial T}{\partial z} \right)$$



Como puede verse, el problema involucra una solución que implica el flujo de fluidos, para conocer el perfil de velocidades y v_z .

$$\frac{\mu}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \right] = \frac{\Delta P}{L}$$
$$v_z = \frac{-\Delta P / L}{4\mu} (r_i^2 - r^2)$$

La capa límite es la porción de fluido cuyo perfil de velocidad es afectada por la presencia de una superficie sólida. Debido a la conservación de masa y a la disminución gradual de la velocidad del fluido en la dirección x , esta cantidad de fluido debe ir a algún lado, por lo que una parte del fluido fluye hacia arriba y da lugar a una pequeña velocidad v_y .



En el flujo laminar, las capas de partículas de fluido se mueven entre sí con intercambio entre capas adyacentes solamente de tipo molecular. Por tanto, la transferencia de calor normal a la dirección de flujo es por conducción y se usa la 1ª ley de Fourier.

Al aumentar la velocidad del fluido, aumenta el transporte volumétrico entre capas.

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$$

Ecuaciones a resolver:

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$$

$$\rho c_p \left(v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) = k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)$$

$$v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

Considerando $\partial^2 T / \partial y^2 \gg \partial^2 T / \partial x^2$

Las ecuaciones anteriores se obtuvieron asumiendo una velocidad uniforme v_∞ en la dirección x , que el fluido es incompresible y de viscosidad constante, que el flujo está en estado estable, no hay gradiente de presión, sin fuerzas externas. Blasius resolvió las ecuaciones diferenciales simultáneas con una transformación para convertirlas en ordinarias.

$$\eta = y \left(\frac{v_\infty}{x\nu} \right)^{1/2}$$
$$f = \frac{\varphi}{(x\nu v_\infty)^{1/2}}$$
$$f \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + 2 \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} = 0$$

La solución de este sistema de ecuaciones se realiza de forma numérica, para obtener el espesor de la capa límite, así como el coeficiente local y promedio de fricción.

$$\delta = y|_{\eta=5} = 5 \sqrt{\frac{\nu x}{v_\infty}}$$

$$\frac{\delta}{x} = 5 \text{Re}_x^{-1/2}$$

$$C_{f,x} = 0.664 \text{Re}_x^{-1/2}$$

$$C_{f,L} = 1.338 \text{Re}_L^{-1/2}$$

Siempre hay una capa fluida adyacente a la frontera sólida en donde el flujo es laminar y es aquí donde existe la mayor resistencia a la transferencia de calor. La dificultad de transferencia de calor se asocia al espesor de la película laminar.

$$R = \frac{L}{kA}$$

Si la película es gruesa, L será grande con R grande; si es delgada, L será pequeña con R pequeña.

Para la mayoría de los gases, las dos capas límite son casi iguales, lo que conlleva $Pr=1$. Esto hace que las soluciones de flujo de fluidos puedan aplicarse directamente a la transferencia de calor, realizando una sustitución de variables adecuada.

De acuerdo con esto, el gradiente de temperatura en la superficie es similar al encontrado por Blasius:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0} = (T_{\infty} - T_0) \left(\frac{0.33206}{x} \text{Re}_x^{1/2} \right)$$

$$\frac{q_y}{A} = h_x (T_0 - T_{\infty}) = -k \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0}$$

Sustituyendo ecuaciones se obtiene

$$\frac{q_y}{A} = k(T_\infty - T_0) \left(\frac{0.33206}{x} \text{Re}_x^{1/2} \right)$$

$$h_x = 0.33206 \frac{k}{x} \text{Re}_x^{1/2}$$

$$\text{Nu}_x = \frac{h_x x}{k} = 0.33206 \text{Re}_x^{1/2}$$

$$(\text{Pr} = 1)$$

Pohlhausen relacionó los espesores de las capas límite térmica e hidrodinámica con el número de Prandtl:

$$\frac{\delta_t}{x} = 5 \text{Re}^{-1/2} \text{Pr}^{-1/3}$$

$$\frac{\delta}{\delta_t} = \text{Pr}^{1/3}$$

Esta definición para la capa límite térmica nos da

$$h_x = 0.33206 \frac{k}{x} \text{Re}_x^{1/2} \text{Pr}^{1/3}$$

$$\text{Nu}_x = \frac{h_x x}{k} = 0.33206 \text{Re}_x^{1/2} \text{Pr}^{1/3}$$

El rango aplicable para esta ecuación es $0.6 < \text{Pr} < 50$

Es de observar que estas ecuaciones relacionan h y Nu de manera local.

$$q_y = h_L A (T_0 - T_\infty) = \int_A h_x (T_0 - T_\infty) dA$$

$$h_L = \frac{1}{A} \int_A h_x dA = \frac{1}{bL} \int_0^L 0.33206 \frac{k}{x} \text{Re}_x^{1/2} \text{Pr}^{1/3} b dx$$

$$h_L = \frac{0.33206}{L} \left(\frac{\mathbf{v}_\infty}{\nu} \right)^{1/2} \text{Pr}^{1/3} \int_0^L x^{-1/2} dx$$

$$h_L = 0.6641k \left(\frac{\mathbf{v}_\infty}{\nu L} \right)^{1/2} \text{Pr}^{1/3}$$

$$Nu_L = 0.6641 \text{Re}_L^{1/2} \text{Pr}^{1/3} = (2Nu_x) \left(\frac{\text{Re}_L}{\text{Re}_x} \right)^{1/2}$$

Se recomienda evaluar las propiedades del fluido a la temperatura media de película

$$T_p: T_p = (T_0 + T_\infty) / 2$$

Esta ecuación se aplica en la región laminar ($\text{Re} < 5 \times 10^5$) y para fluidos con $\text{Pr} > 0.6$

Se observa que al aproximarse x a 0, h tiende al infinito. Del mismo modo, cuando x es muy grande, la temperatura en la capa límite térmica se aproxima a la temperatura de la pared.

Ejemplo:

Fluye agua sobre una placa plana que se mantiene a una temperatura constante de 290 K. La velocidad de la corriente es de 3 m/s. La temperatura de la corriente libre es 285 K. Hallar (a) la longitud de la capa límite laminar, (b) el grosor de la capa límite hidrodinámica y térmica en el punto de transición, (c) el coeficiente local de transferencia de calor en el punto de transición y (d) el coeficiente promedio de transferencia de calor entre la orilla de la placa y el punto de transición.

Solución:

Todas las props. Se evalúan a 285 K y se consideran constantes.

$$\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$$

$$\mu = 1225 \times 10^{-6} \text{ N.s/m}^2 = 1.225 \text{ cP} = 1.225 \times 10^{-3} \text{ kg/ms}$$

$$k = 0.590 \text{ W/m K}$$

$$\text{Pr} = 8.7$$

(a) La transición ocurre a $\text{Re} = 5 \times 10^5$

$$x = \text{Re} \left(\frac{\mu}{\rho v_\infty} \right) = (5 \times 10^5) \frac{1.225 \times 10^{-3}}{(1000)(3)} = 0.2042 \text{ m}$$

(b)
$$\delta = 5(x) \text{Re}_x^{-1/2} = 5(0.2042)(5 \times 10^5)^{-1/2} = 1.444 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$\delta_t = (\delta)(\text{Pr}^{-1/3}) = (1.444 \times 10^{-3})(8.7)^{-1/3} = 7.019 \times 10^{-4} \text{ m}$$

(c)
$$h_x = \frac{(0.33206)k}{x} \text{Re}_x^{1/2} \text{Pr}^{1/3} = \frac{(0.33206)(0.59)}{0.2042} (5 \times 10^5)^{1/2} (8.7)^{1/3}$$

$$h_x = 1396 \text{ W/m}^2 \text{ K}$$

(d) Para el coeficiente promedio de TC entre $x=0$ y $x=L$, la relación Re_L/Re_x es igual a la unidad. Por tanto, se tiene para el Nusselt

$$Nu_L = 2Nu_x$$

$$h_L = 2h_x = (2)(1396) = 2792 \text{ W} / \text{m}^2 \text{ K}$$

$$h_L = 0.6641k \left(\frac{\mathbf{v}_\infty}{\nu L} \right)^{1/2} \text{Pr}^{1/3} = 0.6641(0.59) \left[\frac{(3)(1000)}{(1.225 \times 10^{-3})(0.2042)} \right]^{1/2} (8.7)^{1/3} = 2794 \text{ W} / \text{m}^2 \text{ K}$$

Consideraciones del flujo turbulento

El tratamiento analítico del flujo turbulento no es posible gracias a la naturaleza del mismo, aunque es más fácilmente encontrado en las aplicaciones cotidianas que el laminar, dada la rapidez de procesos que involucra. Las variables del fluido y el flujo turbulento cambian con el tiempo.

La naturaleza caótica del flujo turbulento origina diferentes componentes para la velocidad del fluido, tal como la velocidad fluctuante, dando lugar a torbellinos y conjuntos de partículas que se mueven en dirección normal a la del flujo volumétrico.

Estas fluctuaciones turbulentas originan un flujo de impulso en la dirección x gracias a la velocidad fluctuante $(\rho v'_x v'_y)$, conocido como esfuerzo cortante turbulento o esfuerzo de Reynolds. Este esfuerzo, a su vez, contribuye al transporte total de momento.

Como una cantidad de movimiento, se puede asociar este esfuerzo con una viscosidad y difusividad turbulentas o de torbellino (μ_t, α_t) .

$$\tau_{yx} = \mu \frac{d\bar{v}_x}{dy} + \mu_t \frac{d\bar{v}_x}{dy}$$

En 1925 Prandtl propone el término de longitud libre de mezclado para caracterizar esta difusividad turbulenta: es la distancia que recorre un grupo de partículas en una dirección normal al flujo del fluido, sin que cambien las propiedades del grupo. Con este concepto, se relacionó a la velocidad fluctuante en y (v'_y) con la longitud de mezclado y con el gradiente de la velocidad promedio.

Modelos de Turbulencia

Teoría de Boussinesq

$$\tau_t = \rho(\mathbf{v}'_x \mathbf{v}'_y) = -\mu_t \left(\frac{\partial \hat{\mathbf{v}}}{\partial x} \right)$$

μ_t = viscosidad de torbellino o turbulenta

Teoría de la longitud de mezclado

$$\mathbf{v}'_y = l \frac{d\hat{\mathbf{v}}_x}{dy} \quad l = Ky \quad \mathbf{v}^+ = \frac{1}{K} \ln y^+ + B \quad y^+ = \frac{y \sqrt{\tau_{yx} / \rho}}{\nu}$$

En la región turbulenta, el flujo está dividido en 3 partes: subcapa laminar ($v^+=y^+$), capa amortiguadora ($v^+=5\ln y^+ - 3.05$) y núcleo turbulento ($v^+=2.5\ln y^+ - 5.5$).

Se ha extendido el concepto de difusividad turbulenta a calor y masa:

$$\frac{Q}{A} = -(\alpha + \alpha_t) \frac{d}{dx} (\rho c_p \hat{T})$$

Transferencia de energía en flujo turbulento

Un conjunto de moléculas cuyo origen está en $y-l$ se mueve a una nueva posición gracias a la velocidad fluctuante v'_y . Este conjunto de moléculas tiene una energía que se puede caracterizar como una razón instantánea de transporte de energía $= (\rho v'_y)(c_p T)$

La temperatura en cualquier punto dentro del fluido se descompone en temperatura media y fluctuante de modo similar al que se vio para la velocidad: $T = \bar{T} + T'$

Estas componentes y el promedio en el tiempo del flujo, dan como resultado la ecuación de calor para flujo turbulento ya mencionada

$$\frac{Q_y}{A} = \rho c_p \overline{v'_y T'}$$

$$\frac{Q_y}{A} = -\rho c_p \overline{v'_y l} \frac{d\bar{T}}{dy}$$

$$\frac{Q_y}{A} = -(\alpha + \alpha_T) \frac{d}{dx} (\rho c_p \bar{T})$$

Para esta ecuación se ha visto que el término $v'_y \cdot l$ tiene el mismo papel que la difusividad térmica en flujo laminar, por lo que se llama difusividad turbulenta de calor.

Por esta razón, se define también un número de Prandtl de turbulencia:

$$\text{Pr}_t = \frac{V_t}{\alpha_t}$$

Analogías:

$$\nu_t = \alpha_t$$

La ecuación de transferencia de calor puede ser fácilmente integrada en este caso. Esta aproximación asume que el mecanismo de transferencia turbulenta de calor es exactamente igual que el de momento (por medio del movimiento de torbellinos).

Dado que se ha obtenido que las dos difusividades turbulentas son iguales a $l v'_y$, es de suponerse que el Pr_T sea igual a la unidad. Empíricamente se ha encontrado que Pr_T se aproxima a la unidad para valores grandes de ε_t/ν , por lo que la suposición es razonable para un régimen totalmente turbulento.

Según estos resultados, debe haber entonces una relación directa entre los perfiles de la velocidad y la temperatura.

$$\frac{d}{dy} \left(\frac{\mathbf{v}_x}{\mathbf{v}_\infty} \right)_{y=0} = \frac{d}{dy} \left(\frac{T - T_0}{T_\infty - T_0} \right)_{y=0}$$

Como $Pr=1$, $k=\mu c_p$, por lo que se puede multiplicar la ecuación en ambos lados convenientemente y separarla para obtener la ecuación para el coeficiente superficial de transferencia de calor.

$$h = \frac{\mu c_p}{\mathbf{v}_\infty} \left(\frac{d\mathbf{v}_x}{dy} \right)_{y=0}$$

Como se tiene el coeficiente de fricción $c_f = 2\tau_o / (\rho v_\infty^2)$, se sustituye en la ecuación anterior para obtener otra forma del coeficiente h .

$$h = (\rho v_\infty c_p) \frac{C_f}{2}$$
$$\frac{h}{\rho c_p v_\infty} = St = \frac{C_f}{2}$$

Analogía de Prandtl

La analogía de Reynolds es razonablemente válida en un flujo totalmente turbulento. Sin embargo, debe considerarse también la capa de fluido en que se da la transferencia de calor de tipo molecular, además de números de Prandtl <1 .

En esta región se cumple:

$$\frac{\tau}{\rho} = \nu \frac{dv_x}{dy}$$

$$\frac{q_y}{A} = -\rho c_p \alpha \frac{dT}{dy}$$

Ambas ecuaciones deben integrarse desde $y=0$ hasta la distancia desde la pared en que el flujo se vuelve turbulento, $y=\xi$.

$$\frac{\rho \nu}{\tau} \int_0^{\xi} dv_x = \int_0^{\xi} dy$$

$$\frac{A \rho c_p \alpha}{q_y} \int_{T_0}^{T_\xi} dT = - \int_0^{\xi} dy$$

Integrando e igualando términos en x para eliminarla, queda

$$\frac{\rho \nu v_\xi}{\tau} = \frac{A \rho c_p \alpha}{q_y} (T_0 - T_\xi) \quad A$$

Para la sección de flujo turbulento, se aplica la analogía de Reynolds, para la cual se tiene que

$$h = \frac{Q_y / A}{(T_\xi - T_\infty)}$$

$$C_f = \frac{2\tau}{\rho(\mathbf{v}_\infty - \mathbf{v}_\xi)^2}$$

Al sustituir estas equivalencias de h y c_f en la analogía de Reynolds se obtiene otra forma:

$$\frac{\rho(\mathbf{v}_\infty - \mathbf{v}_\xi)}{\tau} = \frac{A\rho c_p}{q_y} (T_\xi - T_\infty) \quad \text{B}$$

Se combinan entonces las ecuaciones A y B para eliminar T_ξ y se obtiene

$$\frac{\rho}{\tau} \left[\mathbf{v}_\infty + \mathbf{v}_\xi \left(\frac{v}{\alpha} - 1 \right) \right] = \frac{A\rho c_p}{q_y} (T_0 - T_\infty)$$

En este punto se vuelven a introducir los términos para h y c_f , y se reorganiza, por lo que la ecuación anterior se vuelve

$$\frac{h}{\rho c_p \mathbf{v}_\infty} = \frac{C_f / 2}{1 + \frac{\mathbf{v}_\xi}{\mathbf{v}_\infty} \left(\frac{v}{\alpha} - 1 \right)}$$

Para $Pr=1$ esta ecuación se reduce a la analogía de Reynolds. Para $Pr \neq 1$ el St es una función de c_f , Pr y la razón v_ξ/v_∞

La relación v_ξ/v_∞ puede expresarse como

$$\frac{v_\xi}{v_\infty} = 5 \left(\frac{C_f}{2} \right)^{1/2}$$

$$St = \frac{C_f/2}{1 + 5 \left(\frac{C_f}{2} \right)^{1/2} (Pr-1)}$$

$0.5 < Pr < 30$

No hay separación de la capa límite
(cambio inmediato de laminar a
turbulento)

Analogía de von Karman

Es más realista al considerar un cambio gradual en el flujo.

$$St = \frac{C_f/2}{1 + 5 \left(\frac{C_f}{2} \right)^{1/2} \left\{ Pr - 1 + \ln \left[1 + \frac{1}{6} (5Pr - 5) \right] \right\}}$$

Analogía de Colburn

Colburn analizó las ecuaciones obtenidas con anterioridad para el $Nu_x=0.332Re^{1/2}Pr^{1/3}$ y el $c_{fx}=0.664Re^{-1/2}$ y las combinó para obtener una expresión muy sencilla, sabiendo que $St=Nu_x/(RePr)$

$$St Pr^{2/3} = C_f / 2$$

Es una ecuación bastante efectiva para una gran cantidad de casos de transferencia por convección con diferentes geometrías y casos de flujo. El rango de Pr para los casos en que se aplica está dentro de $0.5 < Pr < 50$

Anteriormente se obtuvieron las ecuaciones para el Nu y la longitud de la capa límite en flujo laminar.

En el **flujo turbulento**, se requiere de desarrollar empíricamente algunas ecuaciones.

$$\frac{\delta}{x} = 0.376 \text{Re}_x^{-0.2}$$

$$Nu_x = 0.0296 \text{Re}_x^{0.8} \text{Pr}^{1/3} \quad 5 \times 10^5 \leq \text{Re}_x \leq 10^7$$

$$Nu_x = 0.185 \text{Re}_x \text{Pr}^{1/3} [\log_{10}(\text{Re}_x^{-2.584})] \quad 10^7 \leq \text{Re}_x \leq 10^9$$

$$Nu_L = [0.037 \text{Re}_L^{0.8} - 850] \text{Pr}^{1/3} \quad 5 \times 10^5 \leq \text{Re}_L \leq 10^7$$

Esta última relación aplica a placas que muestran regiones laminares y turbulentas apreciables.

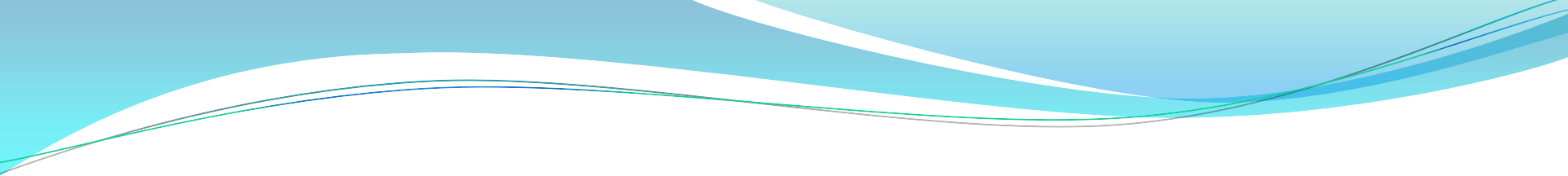
La evaluación de las propiedades para todas estas ecuaciones se sugiere que sea a la temperatura de la película.

Cuando se tiene un flujo uniforme de calor sobre la placa, se obtienen las ecuaciones

$$Nu_x = 0.453 \text{Re}_x^{0.5} \text{Pr}^{1/3} \quad \text{Flujo laminar}$$

$$Nu_x = 0.0308 \text{Re}_x^{0.8} \text{Pr}^{1/3} \quad \text{Flujo turbulento}$$

Y en estos casos, $Q=(q)(A)$, teniendo entonces que $T_{s(x)}=T_\infty + q/h_x$



Fluye aceite para motor a 60°C sobre la superficie superior de una placa plana de 5 m de largo cuya temperatura es de 20°C , a una velocidad de 2 m/s. Determine la razón de transferencia de calor por unidad de ancho de la placa completa.

CONVECCIÓN FORZADA EN FLUJO EXTERNO

Capa Límite sobre un cilindro

Cuando la corriente halla en su camino cuerpos cuervos, es imposible que pueda seguirlos con exactitud, de modo que existe una separación de la capa límite y el sólido, por lo que las soluciones halladas con anterioridad no se aplican. En estos casos el gradiente de presión dp/dx se vuelve positivo y se produce una región de flujo inverso.

Se da la separación de la capa límite a alrededor de 80° , en que la capa límite es laminar, y hasta 140° , en que es turbulento.

Este comportamiento hace difícil el análisis de la transferencia de calor en bancos de tubos y otros accesorios con flujo externo. El investigador debe auxiliarse con el trabajo experimental y análisis numérico.



Para un solo tubo normal al flujo, se aplica la ecuación:

$$Nu_D = B Re^n$$

en el caso de gases

Para líquidos se tiene

$$Nu_D = 1.1 B Re^n (Pr^{1/3})$$

Las propiedades se evalúan a la temperatura de la película

Re_D	B	N
0.4 - 4	0.891	0.33
4 - 40	0.821	0.385
40 - 4000	0.615	0.466
4,000 - 40,000	0.174	0.618
40,000 - 400,000	0.0239	0.805

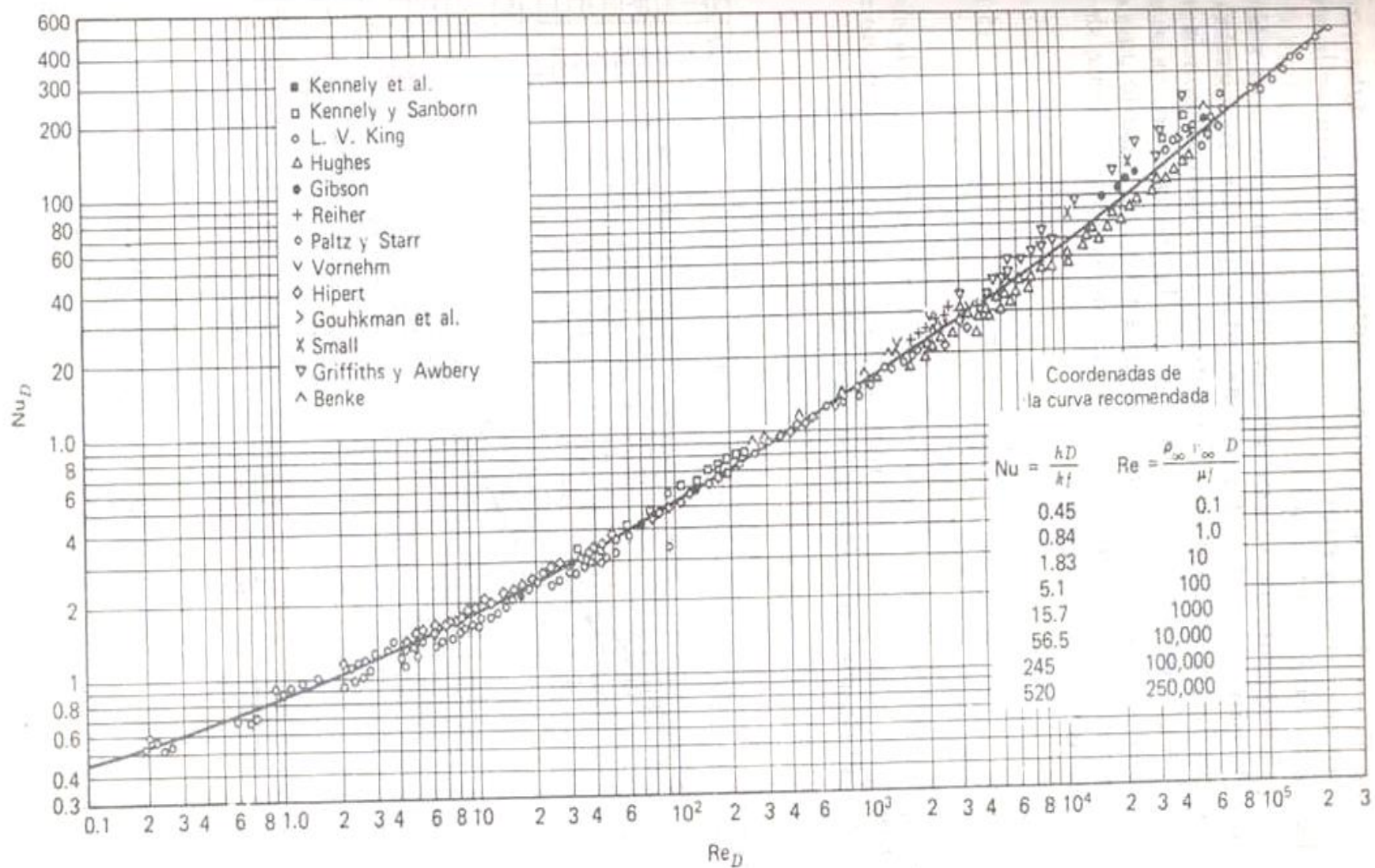


Figura 5.40 Números medios de Nusslet contra Re para el flujo normal a cilindros solos. [De W. H. McAdams, *Heat Transmission*, 3a. edición. (Nueva York: McGraw-Hill Book Company, 1954), pág. 259. Con permiso del editor.

Alternativamente se sugiere la ecuación

$$Nu = 0.3 + \frac{0.62 Re^{1/2} Pr^{1/3}}{\left[1 + (0.4 / Pr)^{2/3}\right]^{1/4}} \left[1 + \left(\frac{Re}{282000}\right)^{5/8}\right]^{4/5}$$

Las propiedades se evalúan a la temperatura de la película.

Para el flujo sobre una esfera

Un tubo largo de vapor de agua de 10 cm de diámetro, cuya temperatura superficial externa es de 110°C, pasa por una zona abierta que no está protegida contra los vientos. Determine la razón de pérdida de calor del tubo por unidad de longitud cuando el aire está a 1 atm de presión y a 10°C y el viento sopla a través del tubo a una velocidad de 8 m/s.

Flujo alrededor de esferas

Líquidos, $1 < Re < 70,000$

$$Nu_D = 2.0 + 0.6 Re_D^{1/2} Pr^{1/3}$$

Aire, $20 < Re < 150,000$

$$Nu_D = 0.33 Re_D^{0.6}$$

Gases, $1 < Re < 25$

$$St = 2.2/Re_D + 0.48 Re_D^{-1/2}$$

$25 < Re < 150,000$

$$Nu_D = 0.37 Re_D^{0.6} Pr^{1/3}$$



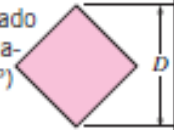
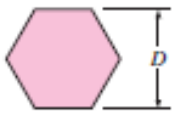

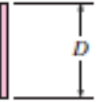

Para las ecuaciones anteriores se usa la temperatura de la película.

Otra ecuación con rango de aplicación $3.5 \leq Re \leq 80,000$ y $0.7 \leq Pr \leq 380$, con propiedades evaluadas a T_b es

$$Nu = 2 + (0.4Re^{1/2} + 0.06Re^{2/3})Pr^{0.4} \left(\frac{\mu_\infty}{\mu_0} \right)^{0.25}$$

TABLA 7-1

Correlaciones empíricas para el número de Nusselt promedio, para convección forzada sobre cilindros circulares y no circulares en flujo cruzado (tomada de Zukauskas, 1972, y Jakob, 1949)

Sección transversal del cilindro	Fluido	Rango de Re	Número de Nusselt
Círculo 	Gas o líquido	0.4-4 4-40 40-4 000 4 000-40 000 40 000-400 000	$Nu = 0.989Re^{0.330} Pr^{1/3}$ $Nu = 0.911Re^{0.385} Pr^{1/3}$ $Nu = 0.683Re^{0.466} Pr^{1/3}$ $Nu = 0.193Re^{0.618} Pr^{1/3}$ $Nu = 0.027Re^{0.805} Pr^{1/3}$
Cuadrado 	Gas	5 000-100 000	$Nu = 0.102Re^{0.675} Pr^{1/3}$
Cuadrado (inclinado 45°) 	Gas	5 000-100 000	$Nu = 0.246Re^{0.588} Pr^{1/3}$
Hexágono 	Gas	5 000-100 000	$Nu = 0.153Re^{0.638} Pr^{1/3}$
Hexágono (inclinado 45°) 	Gas	5 000-19 500 19 500-100 000	$Nu = 0.160Re^{0.638} Pr^{1/3}$ $Nu = 0.0385Re^{0.782} Pr^{1/3}$
Placa vertical 	Gas	4 000-15 000	$Nu = 0.228Re^{0.731} Pr^{1/3}$
Elipse 	Gas	2 500-15 000	$Nu = 0.248Re^{0.612} Pr^{1/3}$

Bancos de tubos

Para este caso, a menudo se usa un diámetro equivalente

$$D_{eq} = \frac{4(S_L S_T - \pi d^2 / 4)}{\pi d}$$

S_T = distancia entre tubos en dirección normal al flujo

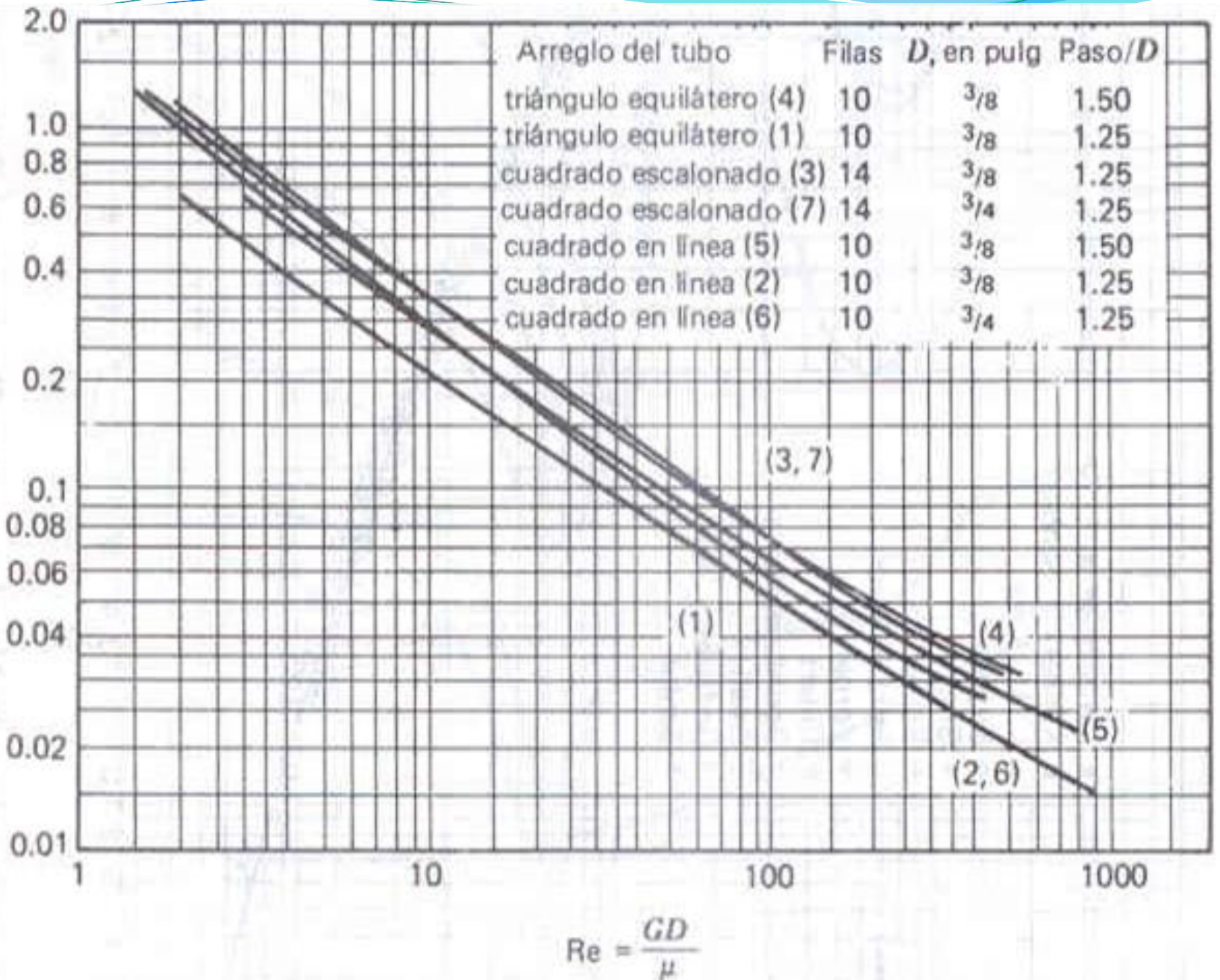
S_L = Distancia entre tubos en dirección del flujo

d = diámetro exterior de los tubos.

S_D = Distancia diagonal entre tubos = $[S_L^2 + (S_T/2)^2]^{1/2}$

Con este diámetro se calcula el Re y se usa la gráfica siguiente en el flujo laminar
(Las propiedades se evalúan a la temperatura media del fluido, excepto μ_o .)

$$\frac{Cf}{2} = \left(\frac{h}{c_p G_m} \right) \left(\frac{c_p \mu}{k} \right)^{2/3} \left(\frac{\mu_w}{\mu_b} \right)^{0.14}$$



Otra aproximación para caracterizar el flujo es calcular el Re tomando en cuenta una velocidad máxima.

$$Re = \frac{v_{\max} D}{\nu}$$

Tubos alineados

$$v_{\max} = \frac{S_T}{S_T - D} v$$

Tubos escalonados muy estrechos
 $2(S_D - D) < (S_T - D)$

$$v_{\max} = \frac{S_T}{2(S_D - D)} v$$

$$Nu = C Re_D^m Pr^n \left(\frac{Pr}{Pr_0} \right)^{1/4}$$

Disposición	Re_D	C, m, n
Alineados	0-100	0.9, 0.4, 0.36
	100-1000	0.52, 0.5, 0.36
	1,000- 2×10^5	0.27, 0.63, 0.36
	$2 \times 10^5 - 2 \times 10^6$	0.033, 0.8, 0.4
Escalonados	0-500	1.04, 0.4, 0.36
	500-1000	0.71, 0.5, 0.36
	1000- 2×10^5	$0.35(S_T/S_L)^{0.2}$, 0.6, 0.36
	$2 \times 10^5 - 2 \times 10^6$	$0.031(S_T/S_L)^{0.2}$, 0.8, 0.36

Las propiedades se evalúan a la temperatura media del fluido.

La ecuación de TC usa en este punto la diferencia media logarítmica de temperaturas,

$$\Delta T_{ml} = \frac{(T_0 - T_e) - (T_0 - T_s)}{\ln \left[\frac{(T_0 - T_e)}{(T_0 - T_s)} \right]}$$

La temperatura de salida del fluido puede determinarse entonces a partir de

$$T_s = T_0 - (T_0 - T_e) e^{\frac{-h \cdot A_0}{\rho G c_p}}$$

T_s = Temperatura de salida del fluido externo

T_e = Temperatura de entrada

A_o = Área de contacto del fluido externo con la tubería

G = Gasto volumétrico

Es difícil predecir los coeficientes de transferencia de calor para el lado envolvente en intercambiadores de calor de coraza y tubo. En la práctica, sin embargo, la resistencia térmica del lado interior del tubo es más fácil de evaluar.

En una empresa se precalienta aire antes de entrar en un horno por medio de agua geotérmica a 120°C que fluye por los tubos de un banco ubicado en un ducto. El aire entra en el ducto a 20°C y 1 atm , con una velocidad media de 4.5 m/s y fluye sobre los tubos en dirección perpendicular. El diámetro exterior de los tubos es de 1.5 cm y se encuentran dispuestos en forma alineada con pasos longitudinal y transversal de $S_L = S_T = 5\text{ cm}$. Se tienen 16 filas en la dirección del flujo con 10 tubos en cada una de ellas. Determine la razón de transferencia de calor por unidad de longitud de los tubos.

Tarea:

10 problemas a elegir entre 7-14 y 7-94

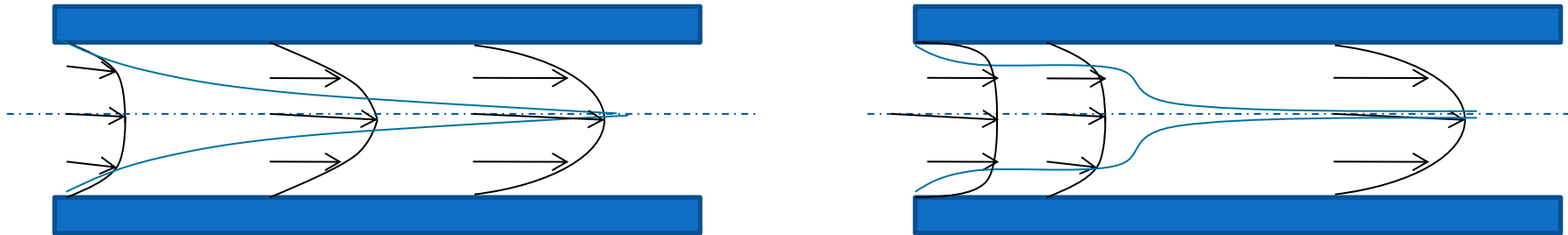
10 entre 8-21 y 8-64 Çengel

En el flujo de fluidos se trata principalmente con la velocidad promedio, que es constante para flujo incompresible. Debido a esto, también es útil trabajar con una temperatura promedio en la Transferencia de Calor.

$$\mathbf{v}_m = \frac{1}{A} \int_A \mathbf{v}_z dA$$

$$T_b = \frac{1}{A \mathbf{v}_m} \int_A \mathbf{v}_z T dA$$

En el caso de un flujo encerrado, el fluido encuentra fronteras sólidas a su alrededor paralelas al flujo, las cuales desarrollan la capa límite. Por tanto, en la entrada de la tubería, el crecimiento de la capa límite es regular. Al aumentar la longitud de la tubería (aumenta z) la capa límite incluye porciones mayores de la sección transversal del flujo. Finalmente se llega al punto en que la capa límite ocupa toda la sección transversal de flujo.



Para valores grandes de z , los perfiles de velocidad ya no cambian y se habla de un flujo totalmente desarrollado ($dv_z/dz=0$). La región en que ocurre lo contrario es la región de entrada. La longitud a la que se desarrolla completamente el flujo es conocida como longitud de entrada.

Para el flujo completamente desarrollado térmicamente

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{T_0(z) - T(r, z)}{T_0(z) - T_b(z)} \right] = 0$$

En la región de un tubo con flujo completamente desarrollado, el coeficiente local de convección es constante.

Las longitudes de entrada en un tubo están dadas por

$$L = 0.05 \text{ Re Pr } D \quad \text{flujo laminar}$$

$$L = 10 D \quad \text{flujo turbulento}$$

Flujo totalmente desarrollado

Cuando un fluido entra en contacto con un sólido, se desarrolla la capa límite, que describe el comportamiento del perfil de flujo con la distancia.

El término “perfil totalmente desarrollado” significa que el perfil ya no cambia en una posición específica: es decir, el perfil **ya no** cambia con la longitud del tubo y **no** es una función de z . Para este caso, tanto v_z como $\partial T / \partial z$ son constantes.

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{T_0 - T}{T_0 - T_b} \right)_{r=r_i} = - \left(\frac{\Delta T / \Delta r}{T_0 - T_b} \right)_{r=r_i} = Cte$$

De un balance de energía sabemos que $q_k = q_h$, por lo que se pueden igualar las ecuaciones de transferencia de calor por conducción y convección para obtener

$$h = - \frac{k(\partial T / \partial r)}{T_0 - T_b}$$

$$\frac{h}{k} = cte$$

$$Nu = \frac{hd_i}{k} = cte$$

Para propiedades constantes del fluido, h es constante e independiente de z . Esta suposición se cumple razonablemente en flujo laminar completamente desarrollado.

CONVECCIÓN FORZADA EN EL FLUJO INTERNO

Flujo interno laminar con convección forzada en tuberías

La ecuación de energía aplicable en este caso para flujo estable incompresible, laminar y totalmente desarrollado es:

$$\frac{k}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \rho c_p \mathbf{v}_z \frac{\partial T}{\partial z}$$

Se simplifica la ecuación usando la suposición de la capa límite, $\partial^2 T / \partial z^2 = 0$, por lo que se simplifica a

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \frac{\mathbf{v}_z}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial z}$$

Si sabemos que el perfil de flujo está totalmente desarrollado, se puede escribir

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{T_0 - T}{T_0 - T_b} \right) = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{dT_0}{dz} + \frac{T_0 - T}{T_0 - T_b} \left(\frac{dT_b}{dz} - \frac{dT_0}{dz} \right)$$

Transferencia de calor por convección: Flujo laminar en tuberías

El flujo en tuberías es completamente viscoso, por lo que se cumple la no separación de la capa límite. Para solucionar la transferencia de calor, se aplican las condiciones frontera; entre las más simples están el flujo constante de calor y temperatura constante de pared T_o .

Un perfil completamente desarrollado implica que está completamente establecido en cierta localización. Esto significa, para la TC, que el Nu es constante en el flujo laminar a partir de cierta distancia.

Para encontrar una temperatura del fluido T_b en función de z es necesario realizar un análisis de balance de energía.

$$\Delta H = Q_o$$

Donde q_o es el flujo de calor en la pared del tubo.

Para un líquido o gas ideal y tomando c_p como constante

$$Q_o = \rho v A c_p \Delta T$$

Donde ΔT es el cambio en la temperatura del fluido T_b

Por otra parte, las ecuaciones de transferencia de calor en forma diferencial son:

$$dQ_o = h (T_o - T_b) dA$$

$$dQ_o = \rho v A c_p dT_b$$

Se sabe que el área de un cilindro es $\pi d_i dz$

$$h(\pi d_i)(T_0 - T_b)dz = \rho \mathbf{v}_z Ac_p dT_b$$

$$\frac{h(\pi d_i)\Delta T}{\rho \mathbf{v}_z Ac_p} = \frac{dT_b}{dz} = -\frac{d(\Delta T)}{dz}$$

Ya que el flujo debe estar totalmente desarrollado, significa que la relación L/d debe ser mayor a 60 ($h \neq h_x$). En caso necesario, debe calcularse un h promedio, como ya se hizo en el ejemplo anterior. Para la evaluación final de T(z) se requiere calcular el St con alguna de las analogías presentadas.

La ecuación de transferencia de energía a lo largo de un tubo es

$$\mathbf{v}_z \frac{\partial T}{\partial z} = \alpha \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right]$$

Ya que la transferencia se da radialmente y a lo largo del tubo. Esta ecuación ya se ha simplificado en algunos términos; sin embargo, sigue siendo difícil de resolver. La ecuación se simplifica un poco más usando la suposición de la capa límite ($d^2T/dz^2 \ll d^2T/dr^2$), con lo que se elimina el término d^2T/dz^2

$$\mathbf{v}_z \frac{\partial T}{\partial z} = \alpha \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) \right]$$

Para un sistema cartesiano:

$$\mathbf{v}_z \frac{\partial T}{\partial z} + \mathbf{v}_y \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

Las ecuaciones de flujo turbulento en convección natural y forzada pueden tener en común muchos aspectos, ya que comparten puntos teóricos, como ya se vio en los ejemplos.

La combinación de la ecuación de Newton del calor con la 1a ley de Fourier nos da la siguiente ecuación:

$$h = \frac{k \frac{\partial T}{\partial x}}{T_0 - T_b}$$

Por otro lado, para un flujo completamente desarrollado, tenemos que el perfil no cambia con la distancia y , por tanto, no es función de z en un tubo. Se puede escribir entonces:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{T_0 - T}{T_0 - T_b} \right) = \frac{\Delta T / \Delta r}{T_0 - T_b} = cte$$

Combinando las 2 ecuaciones anteriores tenemos:

$$\frac{h}{k} = \frac{\partial T / \partial r}{T_0 - T_b} = \frac{\Delta T / \Delta r}{T_0 - T_b} = cte$$

Multiplicando este grupo por el diámetro del tubo significa que $hd/k = Nu = cte$.

Esto nos dice que el coeficiente h es constante e independiente de z para propiedades constantes en el fluido para un perfil totalmente desarrollado.

FLUJO EN TUBERÍAS

Caso 1: Flujo constante de calor en la pared.

En este caso, ya que $q/A = \text{Cte}$. También la diferencia de temperaturas es constante, $T_o - T_b = \text{cte}$. Por tanto,

$$\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{dT_o}{dz} = \frac{dT_b}{dz}$$
$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) = \frac{\mathbf{v}_z}{\alpha} \frac{dT_b}{dz}$$

Esta ecuación dice que la temperatura superficial y la temperatura media del seno del fluido varían linealmente. Para este sistema, se ha calculado que el Nu es

$$Nu_D = 4.364$$

Nusselt para la región de entrada de tubos circulares con flujo laminar y calor constante de pared

$(x/R) / (RePr)$	Nu_x
0	∞
0.002	12.00
0.004	9.93
0.01	7.49
0.02	6.14
0.04	5.19
0.100	4.51
∞	4.36

Esta condición se halla comúnmente en el calentamiento de tubería con resistencias eléctricas, radiante, nuclear, etc. Se halla también en intercambiadores de flujo cruzado con el producto del flujo másico por la capacidad calorífica aproximadamente igual en ambos fluidos.

Dado que en este caso, el flujo de calor será constante, los términos de la ecuación de balance de energía serán constantes también, por lo que reorganizando la ecuación se obtiene:

$$\rho c_p \mathbf{v}_z \frac{d_i}{4} dT - \frac{q_r}{A} dz = 0$$

$$\int_{T_{b1}}^{T_{b2}} dT = \frac{1}{\rho c_p \mathbf{v}_z (d_i / 4)} \int_0^z \frac{q_r}{A} dz$$

$$T_{b2} - T_{b1} = 4 \frac{q_r / A}{\rho c_p \mathbf{v}_z} \frac{z}{d_i}$$

Cuando se desea conocer la temperatura de la pared del tubo a la salida:

$$T_0 = T_{b2} + \frac{q_r / A}{h}$$

FLUJO EN TUBERÍAS

Caso 2: Temperatura de pared constante.

Esta condición de frontera se halla muy comúnmente en equipo de transferencia de calor como evaporadores y condensadores. La temperatura es aproximadamente constante cuando el producto del flujo másico por la capacidad calorífica (denominador lado izquierdo) de un fluido es mucho más grande que el del otro fluido.

$$\text{C.F.} \quad T(r=r_i) = T_o \quad L_1 \leq z \leq L_2$$
$$\frac{\pi d_i h}{\rho \mathbf{v}_z \frac{\pi d_i^2}{4} c_p} dz = \frac{4h}{\rho c_p \mathbf{v}_z d_i} dz = \frac{dT_b}{T_0 - T_b}$$

Si se integra esta ecuación y se toman los límites correspondientes

$$\begin{aligned} T(z=0) &= T_{b1} \\ T(z=L) &= T_{b2} \\ \Delta T(z=0) &= \Delta T_1 \\ \Delta T(z=L) &= \Delta T_2 \end{aligned} \quad \frac{\Delta T_2}{\Delta T_1} = \frac{T_0 - T_{b2}}{T_0 - T_{b1}} = e^{-4St(L/d_i)}$$

$$\frac{T - T_0}{T_e - T_0} = e^{-\left(\frac{h}{\rho c_p v_z}\right)\left(\frac{4z}{D}\right)}$$

El Nu para este caso queda como

$$Nu_D = 3.658$$

Alternativamente, la ecuación de Sieder y Tate se aplica en flujo de tubos con temperatura constante de pared para flujos laminares y ha sido obtenida a partir de datos experimentales.

$$Nu_L = 1.86 \left(\text{Re Pr} \frac{D}{L} \right)^{1/3} \left(\frac{\mu_m}{\mu_0} \right)^{0.14}$$

Para esta ecuación se evalúan las propiedades del fluido a la temperatura media, T_{mb} . Solamente la viscosidad de pared, μ_0 , se evalúa a la temperatura de pared T_0 .

Para un flujo que no está completamente desarrollado (región de entrada de la tubería), en un tubo con flujo laminar y temperatura constante de pared, se debe aplicar la siguiente tabla y obtener el Nu y posteriormente el coeficiente h .

$(x/R) / (RePr)$	Nu_x
0	∞
0.001	12.86
0.004	7.91
0.01	5.99
0.04	4.18
0.08	3.79
0.10	3.71
∞	3.66

$$Nu = 3.66 + \frac{0.065 \left(\frac{D}{L}\right) RePr}{1 + 0.04 \left[\left(\frac{D}{L}\right) RePr\right]^{2/3}}$$

Ejemplo

Se usa un tubo de cobre de 1 in de diámetro, 14 BWG, para calentar un fluido hidráulico desde 60 a 150°F por medio de una resistencia eléctrica. El fluido fluye a 10 ft/min. Determinar a) el flujo requerido de calor, b) la temperatura superficial en la salida del tubo de 10 ft de longitud.

Datos:

$$d_e = 1 \text{ in}$$

$$d_i = 0.834 \text{ in}$$

$$A_i = 0.00379 \text{ ft}^2$$

$$C_p(150^\circ\text{F}) = 0.499 \text{ Btu/lb}_m\text{-}^\circ\text{F}$$

$$\nu(100^\circ\text{F}) = 10.7 \times 10^{-5} \text{ ft}^2/\text{s}$$

$$\text{Pr}(100^\circ\text{F}) = 130$$

$$k(100^\circ\text{F}) = 0.069 \text{ Btu/hr-ft-}^\circ\text{F}$$

Ejemplo

Se hace pasar agua a 10 ft/s en un tubo de 1 in de diámetro a 50°F. Por fuera del tubo se está condensando vapor saturado de pentano a 96°F. Se puede suponer constante esta temperatura a lo largo de la superficie interior del tubo. Determinar la temperatura de salida del agua y la transferencia de calor en los 10 ft de tubo.

Solución

Para usar cualquiera de las analogías es necesario conocer Re y Pr , las cuales varían con la temperatura. Por lo tanto se requiere de un procedimiento de prueba y error para solucionar el problema.

De este modo, es necesario establecer una estimación inicial de la temperatura de salida. Se supone una temperatura de salida del fluido de 78°F, por lo que la temperatura promedio a lo largo del tubo para el fluido es $T_m = (50 + 78) / 2 = 64^\circ\text{F}$. Se calculan los promedios de las temperaturas en los extremos del tubo y se calcula un promedio de éstos, para suponerlo como el promedio de la película de fluido adyacente al tubo. Los promedios son 74, 88 y 81, respectivamente. Se calculan entonces el Re con las propiedades del fluido a 81°F, que se supone como la temperatura de película.

$$Re = \frac{(1/12 \text{ ft})(10 \text{ ft} / \text{s})}{0.929 \times 10^{-5} \text{ ft}^2 / \text{s}} = 8.97 \times 10^4$$

$$C_f = 0.0046$$

a) analogía de Re

$$St = C_f / 2 = 0.0023$$

b) Prandtl

$$St = \frac{C_f / 2}{1 + 5 \sqrt{\frac{C_f}{2}} (\text{Pr} - 1)} = \frac{0.0023}{1 + 5(0.048)(4.89)} = 0.00106$$

c) von Karman

$$St = \frac{0.0023}{1 + 5(0.048)[4.89 + \ln(5.08)]} = 0.000897$$

d) Colburn

$$St = 0.0023(5.89)^{-2/3} = 0.000705$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación $(T_{b2} - T_p)/(T_{b1} - T_p) = \exp(-4St (L/d_i))$ nos da

a) $T_{b2} = 65.3$	$q = \rho A v c_p (T_{b2} - T_{b1}) = 52 \text{ Btu/s}$
b) $T_{b2} = 77.6$	93.9
c) $T_{b2} = 80$	102.0
d) $T_{b2} = 82.7$	111.2

Otro ejemplo

El flujo de calor a lo largo de un tubo varía senoidalmente de acuerdo con la expresión $q/A=600+1800\text{sen}(\pi x/L)$, en donde q/A está en Btu/hr-ft^2 y x en ft. La longitud de tubo es igual a 10 ft y su diámetro de 1 in. Mostrar, en función de x , a) el flujo de calor, b) la temperatura media del fluido, c) la temperatura superficial local. Se puede suponer que es válida la condición totalmente desarrollada tal que h_x es constante. El fluido que fluye es agua que entra a la velocidad de 1 ft/s a una temperatura de 50°F.

$$T_{b2} - T_{b1} = 4 \frac{Q_r / A}{\rho c_p \mathbf{v}_z} \frac{L}{d_i}$$

$$T_{b2} - T_{b1} = \frac{1}{\rho c_p \mathbf{v}_z} \frac{d_i}{4} \int_0^x \left(\frac{q_r}{A} \right) dx$$

La ecuación de Sieder y Tate es grandemente aceptada por ajustarse a los datos experimentales. En algunas ocasiones puede variar mucho con respecto a estos datos, aunque tal desviación provoca solamente que el diseño de intercambiadores de calor sea conservador.

La desviación que algunas veces se presenta en esta ecuación se piensa que es debida a los efectos de la convección natural. Para estos casos, probablemente el perfil esté ya completamente desarrollado a lo largo del radio en una corta distancia z , de modo que se aplica la suposición de un Nu constante, $Nu = 3.658$.

En el caso de largas tuberías con flujo laminar, es lógico que la temperatura de descarga T_{b2} se aproxima a la temperatura de la pared T_o . Por tanto, se puede decir

$$\dot{m}c_p (T_{b2} - T_{b1}) = \int_0^L h(T_o - T_b) dA = \bar{h} (T_{b2} - T_{b1}) (\pi d_i) L$$

La que se rearrregla en la forma

$$Nu_D = 0.5 \text{Re} \text{Pr} \frac{d_i}{L}$$

FLUJO EN TUBERÍAS:

Flujo turbulento

El caso de flujo completamente turbulento no puede describirse de manera adecuada, de modo que no hay soluciones analíticas. Las aproximaciones dadas por las teorías ya revisadas con los datos experimentales permiten obtener ecuaciones empíricas.

La ecuación de **Dittus-Boelter** es muy recurrida para el flujo turbulento en tuberías:

$$Nu_D = 0.023 Re^{0.8} Pr^n$$

$n=0.3$ si el fluido se enfría

$n=0.4$ si el fluido se calienta

$$10^4 < Re < 1.2 \times 10^5$$

$$0.7 < Pr < 100$$

$$L/d > 60$$

Todas las propiedades se evalúan a la temperatura promedio del fluido T_{mb} . Se aplica la ecuación en cambios de temperatura (ΔT) pequeños y tubos lisos.

Colburn propuso otra ecuación empleando el St

$$St = 0.023 Re_D^{-0.2} Pr^{-2/3}$$

$$Re_D > 10^4$$

$$0.7 < Pr < 160$$

$$L/d > 60$$

El Re_D y Pr se evalúan a la temperatura promedio de la película, mientras que el St corresponde a la temperatura promedio del seno del fluido T_{mb} .

McAdams modificó la ecuación de Colburn buscando la aplicación en un rango mayor de Pr

$$St = 0.023 Re_D^{-0.2} Pr^{-2/3} \left(\frac{\mu_m}{\mu_0} \right)^{0.14}$$

$Re > 10^4$

$0.7 < Pr < 17,000$

$L/d > 60$

Las propiedades se evalúan a la temperatura promedio del seno del fluido T_{mb} , excepto μ_0 que es a la temperatura de la pared T_o .

Para el caso de grandes diferencias de temperatura, **Sieder y Tate** sugirieron:

$$Nu_D = 0.027 Re_D^{0.8} Pr^{1/3} \left(\frac{\mu_m}{\mu_0} \right)^{0.14}$$

$0.7 < Pr < 17600$

$Re > 10000$

$L/d > 60$

Se aplican casi las mismas restricciones que en ecuaciones anteriores. Todas las propiedades se evalúan a la temperatura media del fluido T_{mb} , excepto μ_0 .

La desventaja de las ecuaciones vistas, es que no se aplican en general a grandes longitudes de tubería, regiones de entrada o tuberías muy rugosas. Sin embargo, todas estas condiciones por fortuna no son propicias para la transferencia de calor; es decir, no se aplican tampoco a los equipos de transferencia de calor.

En general, en el flujo turbulento el perfil de temperatura se establece rápidamente, cerca de los 10 o 12 diámetros y con toda seguridad en los 50 diámetros. Debido a la corta distancia que esto representa, las ecuaciones son muy aproximadas a la realidad. La h calculada en casos contrarios es conservadora: la h en la región de entrada es mayor a la media calculada.

Las ecuaciones de Dittus-Boelter y de Sieder y Tate aún así son muy usadas y se recomiendan especialmente para hidrocarburos. Aunque se utilizan también para gases, sus resultados son menos precisos.

Se puede alcanzar una mayor precisión si no se desean variaciones en los cálculos usando las diferentes ecuaciones para obtener h . La segunda ecuación de Petukhov es considerada como muy precisa, aunque existe una modificación adicional por Gnielinski.

$$Nu = \frac{\left(\frac{C_f}{2}\right) (Re - 1000) Pr}{1 + 12.7 \left(\frac{C_f}{2}\right)^{0.5} (Pr^{2/3} - 1)}$$

$$0.5 \leq Pr \leq 2000$$

$$10^3 \leq Re \leq 5 \times 10^6$$

$$C_f = f/4$$

$$C_f / 2 = f/8$$

Propiedades a la temperatura media del fluido

Correlaciones para gases y líquidos con ΔT grande

Propiedades variables:

$$Nu = 5.0 + 0.015 Re^a Pr^b$$

$$a = 0.88 - 0.24/(4 + Pr)$$

$$b = 1/3 + 0.5 e^{-0.6Pr}$$

$$10^4 < Re < 10^6$$

$$0.1 < Pr < 10^5$$

Esta ecuación de Sleicher y Rouse se recomienda para líquidos con propiedades tanto constantes como variables. Las propiedades se evalúan para el Re a la temperatura de película. El Pr es a la temperatura de la pared. Para el caso de propiedades constantes, todas las propiedades son a la temperatura media del seno T_{mb} .

Para gases:

$$Nu = 5.0 + 0.012 Re^{0.83}(Pr + 0.29)$$

$$10^4 < Re < 10^6$$

$$0.6 < Pr < 0.9$$

Se aplican las mismas condiciones para la evaluación de las propiedades.

Metales líquidos

Los metales líquidos se usan para remover calor de los reactores nucleares. El número de Pr para estas especies es muy bajo debido a la elevada conductividad.

Gracias a esto y a las demás propiedades, el mecanismo dominante para la transferencia de calor es del tipo molecular aún en el flujo turbulento.

Sleicher y Rouse han propuesto

Para un flujo de calor constante:

$$Nu_D = 6.3 + 0.0167 Re^{0.85} Pr^{0.93}$$

Temperatura de pared constante

$$Nu_D = 4.8 + 0.0156 Re^{0.85} Pr^{0.93}$$

El Re es a la temperatura de película y el Pr a la temperatura de pared T_o .

Para conductos con configuración diferente a los tubos, se utiliza la definición del diámetro equivalente para calcular el Re (y otros números adimensionales).

$$D_{eq} = \frac{4A_t}{P}$$

A_t es el área del ducto de sección transversal al flujo y P es el perímetro.

Ejemplo

Se introduce agua a 50°F en un tubo de $\frac{1}{2}$ in calibre 40 a razón de 60 gal/min. La pared del tubo se mantiene a 210°F condensando vapor. Encontrar la temperatura de salida del agua y el calor total transferido si el tubo mide 5 ft de longitud.

Problemas

Estime el coeficiente de transferencia de calor para agua que fluye a 20°C en un tubo liso de 0.04 m de diámetro a un $\text{Re} = 50\,000$, si la pared del tubo se mantiene a 40°C . Asuma una corta distancia de tubería, de tal manera que la temperatura media del fluido es 20°C .

El metal líquido NaK se usa a menudo para transferir calor desde el núcleo a los hervidores en un reactor nuclear. Considere una mezcla NaK con 45% de Na que fluye en un tubo liso de diámetro interior 0.04 m a un Re de $50\,000$. Halle el número de Nu si la temperatura del fluido es 640 K y la temperatura de la pared es 680 K . Asuma una distancia de tubería muy corta, de modo que se tienen una temperatura media del fluido de 640 K .

Estime el Nu y el coeficiente de transferencia de calor para los casos siguientes:

1) agua a 293.15 K y $\text{Re}=70\,000$, 2) agua a 320 K y $\text{Re}=20\,000$, 3) aire a 1 atm y 20°C , $\text{Re}=50\,000$, 4) aire a 1 atm y 30°C , $\text{Re}=18\,000$. En cada caso el fluido corre por un tubo de 1 in calibre 40 y con temperatura de pared de 55°C .

Se mantiene una superficie plana de $8\text{ in} \times 2\text{ ft}$ a una temperatura de 200°F . Evaluar el coeficiente de transferencia de calor local al inicio de la placa y encontrar el valor medio de h y el calor total transferido en toda la placa si el fluido es aire a 80°F corriendo paralelo a la superficie con una velocidad de 10 ft/s .

Entra aire a 100°F y 60 psi en el espacio entre dos placas adyacentes de combustible en el núcleo de un reactor nuclear. El flujo de aire es de $6000\text{ lb}_m/\text{hr}\cdot\text{ft}^2$, mientras que las placas de combustible miden 4 ft de largo y tienen $\frac{1}{2}\text{ in}$ de distancia entre ellas. El flujo de calor entre las superficies de las placas varía de acuerdo con $q/A = a + b \cdot \sin(\pi x/L)$, en donde $a = 250\text{ Btu/hr}\cdot\text{ft}^2$, $b = 4000\text{ btu/hr}\cdot\text{ft}^2$. Para estas condiciones hacer gráficas de flujo de calor contra x y temperatura media del aire contra x .

Se introduce agua a 50°F en un tubo de $1\frac{1}{2}\text{ in}$ de diámetro, 16 BWG y 8 ft de largo a una velocidad de 35 ft/s . Hay vapor a 240°F condensándose en la pared exterior del tubo. Calcular el valor medio del coeficiente de transferencia de calor en la interfase tubo-agua, usando a) la analogía de Reynolds, b) la de Prandtl, c) la de von Karman y d) la de Colburn.

Convección Natural

La convección natural se produce como resultado de la gravedad y el movimiento de masas de fluido gracias a diferencias en la densidad. La fuerza neta ejercida por un cuerpo es pues el producto de las diferencias de densidad por la gravedad y el volumen de un cuerpo.

$$F = (\rho_c - \rho_f)g V_c$$

La variable más importante es la temperatura. Por tanto, la relación de esta variable con el cambio constante de flujo en la convección natural es por medio del coeficiente de expansión volumétrica β . Este coeficiente es equivalente al inverso de la temperatura absoluta.

La fuerza de empuje de un fluido es proporcional a la diferencia de densidades y, por tanto, a la diferencia de temperaturas.

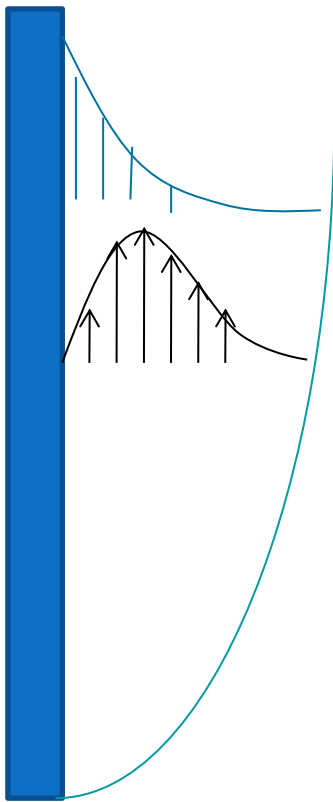
La ecuación de cantidad movimiento, en este caso, debe involucrar el término debido a la fuerza de flotación.

$$\mathbf{v}_x \frac{\partial \mathbf{v}_x}{\partial x} + \mathbf{v}_y \frac{\partial \mathbf{v}_x}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 \mathbf{v}_x}{\partial y^2} + g\beta(T - T_\infty)$$

El número de Grashof determina si el flujo es laminar o turbulento en la convección natural, ya que representa la relación de la fuerza de empuje con respecto a las fuerzas viscosas.

$$Gr_L = \frac{\beta g (T_0 - T_\infty) L^3}{\nu^2}$$

Para placas verticales el número crítico de Gr está alrededor de 10^9 .



Fluido
estacionario
 $v=0$
 T_∞

Convección natural en una pared

Para una pared vertical calentada se tiene

$$Nu_x = 0.359 Gr_x^{1/4}$$

$$Nu_L = 0.478 Gr_L^{1/4}$$

$$\frac{Nu_L}{Gr_L^{1/4}} = K$$

$$Gr_x = \frac{\beta g x^3 (T_0 - T_\infty)}{\nu^2}$$

Pr	$Nu_L/Gr_L^{1/4}$	$Nu_L/(Gr_L Pr)^{1/4}$
0.73	0.478	0.517
10	1.09	0.612
100	2.06	0.652
1000	3.67	0.653

Cuando se presenta una transición de laminar a turbulento en la capa límite, se sugieren las relaciones:

$$Nu_L = 0.555 (Gr Pr)^{1/4}$$

$$Gr Pr < 10^9$$

$$Nu_L = 0.021 (Gr Pr)^{2/5}$$

$$Gr Pr > 10^9$$

Para una placa con temperatura constante de pared:

$$Nu_x = 0.508 \frac{Pr^{1/2} Gr_x^{1/4}}{(0.952 + Pr)^{1/4}}$$

$$Nu_L = 0.678 \frac{Pr^{1/2} Gr_L^{1/4}}{(0.952 + Pr)^{1/4}}$$

Estas ecuaciones son válidas también para cilindros verticales.

La transferencia de calor por convección natural sobre una superficie depende de la configuración geométrica y de su orientación, al igual que de las propiedades usuales como diferencia de temperaturas y propiedades del fluido.

Convección Natural en Canales Verticales

Se pueden colocar 2 paredes una frente a otra para formar un canal vertical. Se puede considerar entonces que una de ellas está caliente y la otra fría para transmitir el calor. La temperatura promedio del gas es:

$$T_m = (T_1 + T_2)/2$$

La temperatura variará de una placa a otra, suponiendo una temperatura uniforme en cada placa. Por tanto, usando la 1a ley de la termodinámica, se tiene:

$$\frac{d^2T}{dy^2} = 0$$

$$T = c_1y + c_2$$

Las condiciones frontera son $T=T_1$ en $y=L$ y $T=T_2$ en $y=-L$

$$T = \frac{\Delta T}{2} \frac{y}{L} + T_m$$

$$\Delta T = T_1 - T_2$$

Para un flujo laminar propiciado solamente por la diferencia de densidad del fluido, la ecuación del movimiento es:

$$\mu \frac{d^2 \mathbf{v}_x}{dy^2} = \frac{dp}{dx} + \rho g$$

La densidad puede expresarse como una ecuación de estado en series de Taylor

$$\rho = \rho_m - \rho_m \beta (T - T_m) + \dots$$

Truncándola hasta el segundo término y sustituyéndola en la ecuación del movimiento, y conociendo que el término dp/dz es la presión hidrostática del gas igual a $-\rho g$, la ecuación queda

$$\mu \frac{d^2 \mathbf{v}_x}{dy^2} = \rho_m \beta_m g (T - T_m)$$

Observando los términos de la ecuación podemos decir que las fuerzas viscosas igualan, en este tipo de problemas, a las fuerzas de flotación. Se sustituye entonces el perfil de temperaturas en la ecuación anterior, que está en función de y , para separar e integrar la ecuación dos veces y obtener el perfil de velocidades.

$$\mathbf{v}_x = \frac{-\rho \beta g \Delta T}{12\mu} \frac{y^3}{L} + c_1 y + c_2$$

Las condiciones frontera se usan son:

$\mathbf{v}_x(+/-L) = 0$, por lo que se obtiene

$$\mathbf{v}_x = -\frac{\rho \beta g \Delta T L^2}{12\mu} \left[\left(\frac{y}{L} \right)^3 - \frac{y}{L} \right]$$

La ecuación anterior está en términos de una longitud de pared adimensional y/L , se busca una relación con una velocidad adimensional también. La relación de las fuerzas de inercia con respecto a las fuerzas viscosas establece esta velocidad adimensional $v_x^* = (\rho v_x L) / \mu$.

$$v_x^* = -\frac{1}{12} \frac{\rho^2 \beta g \Delta T L^3}{\mu^2} [(y^*)^3 - y^*]$$

La agrupación de términos es igual a Gr , de modo que la velocidad adimensional es $v_x^* = Gr/12 (y^{*3} - y^*)$

Experimentalmente, la transferencia de calor en canales de este tipo se expresa como una función del Nu en la forma $Nu = Nu(Gr, Pr, H/L)$, donde H es la altura de las paredes y L es el ancho o longitud de transferencia de calor. De manera empírica se tiene

Para régimen de conducción $Gr_L < 2 \times 10^3$ $Nu_L = 1$

Flujo laminar $2 \times 10^3 < Gr_L < 2 \times 10^5$ $Nu_L = 0.18 Gr^{1/4} (H/L)^{-1/9}$

Flujo turbulento $2 \times 10^5 < Gr_L < 2 \times 10^7$ $Nu_L = 0.065 Gr^{1/3} (H/L)^{-1/9}$

Convección natural en superficies horizontales

Cilindros

En el rango $10000 < Gr_D Pr < 10^9$ se sugiere

$$Nu_D = 0.53(Gr_D Pr)^{1/4}$$

Las propiedades se evalúan a la temperatura de la película.

Para rangos menores del $Gr_D Pr < 10^4$ se sugiere

$$Nu^3 e^{-6/Nu} = \frac{Gr_D Pr}{235}$$

Superficies planas

Para el rango $10^5 < Gr_L Pr < 2 \times 10^7$, con placas calientes hacia arriba o placas frías hacia abajo,

$$Nu_L = 0.54(Gr_L Pr)^{1/4}$$

Para el rango $2 \times 10^7 < Gr_L Pr < 3 \times 10^{10}$

$$Nu_L = 0.14(Gr_L Pr)^{1/3}$$

Para placas calientes hacia abajo o placas frías hacia arriba, se recomienda para $3 \times 10^5 < Gr_L Pr < 10^{10}$

$$Nu_L = 0.27(Gr_L Pr)^{1/4}$$

La longitud característica depende de la geometría: para una superficie cuadrada es el lado L; para un rectángulo es la media de las dimensiones; para un área circular es $0.9D$.

Se transporta vapor saturado por un tubo de acero de 2 in de diámetro de calibre 80 con aislante exterior de 1 1/2 in de 85% de magnesia. Se desea conocer la razón de pérdida de calor por unidad de longitud de tubo aislado, si la línea de vapor está (a) horizontal y (b) vertical en una distancia de 20 ft. El tubo está en aire inmóvil a 40°F, La temperatura de saturación de vapor a 500 psi es de 467°F.

Solución

$$q = \Delta T / (R_t + R_{MgO} + R_a)$$

$$R_t = \ln(D_e/D_i) / 2\pi kL = \ln(2.375/1.939) / (2)(3.1416)(23)(1) = 0.0014 \text{ hr } ^\circ\text{F}/\text{Btu}$$

$$R_{MgO} = \ln(5.375/2.375) / 2(3.1416)(0.041)(1) = 3.17$$

$$R_a = 1 / (hA) = [h_o (\pi D_e L)]^{-1} = [h_o (\pi)(5.375/12)(1)]^{-1} = 0.711/h_o$$

q debe ser también igual a

$$q = h_o A (T_o - 40) = 1.41 h_o (T_o - 40) \text{ y } q = (467 - T_o) / (R_t + R_{MgO}) = (467 - T_o) / 3.1714$$

Como primer paso se supone una temperatura entre 40 y 467. Podría ser $T_o = 100^\circ\text{F}$. Para esta temperatura, la $T_p = (100 + 40) / 2 = 70$. Las propiedades del aire a esta temperatura son: $g\beta\rho^2/\mu^2 = 2.29 \times 10^6$, $\rho = 0.075 \text{ lb}_m/\text{ft}^3$, $\mu = 1.23 \times 10^{-5} \text{ lb}_m/\text{ft}\cdot\text{s}$, $k = 0.0149 \text{ Btu}/\text{hr}\cdot\text{ft}\cdot^\circ\text{F}$, $Pr = 0.71$

Una sección de 6 m de largo de un tubo horizontal de agua caliente de 8 cm de diámetro pasa a través de un cuarto grande cuya temperatura es de 20°C. Si la temperatura de la superficie exterior del tubo es de 70°C, determine la razón de pérdida de calor en el tubo por convección natural.

Solución

En este caso se proporciona la temperatura de la pared, por lo que la $T_p =$

$$(70+20)/2=45$$

$$k=0.02699 \text{ W/m}\cdot\text{°C}$$

$$\nu=1.75 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$$

$$\text{Pr}=0.7241$$

$$\beta= 1/T = 1/318 \text{ K} = 0.003144 \text{ K}^{-1}$$

Convección natural de aire

Observándose las ecuaciones usadas, todas tienen aproximadamente la misma forma, de tal modo que para un fluido muy común, como el aire, en convección natural se pueden modificar las ecuaciones para que obedezcan una forma general.

$$h = A \left(\frac{\Delta T}{L} \right)^b \quad (\text{Unidades inglesas})$$

Geometría	Rango	A	b	L
Superficies verticales (planos y cilindros)	$10^4 < Ra_L < 10^9$	0.2 9	1/4	Altura
	$10^9 < Ra_L < 10^{12}$	0.19	1/3	1
Cilindros horizontales	$10^3 < Ra_L < 10^9$	0.27	1/4	Diámetro
	$10^9 < Ra_L < 10^{12}$	0.18	1/3	1
Planos horizontales (placas calientes hacia arriba o placas frías hacia abajo)	$10^5 < Ra_L < 2 \times 10^7$	0.27	1/4	Lado
	$2 \times 10^7 < Ra_L < 3 \times 10^{10}$	0.22	1/3	1
Placas frías hacia arriba o placas calientes hacia abajo	$3 \times 10^5 < Ra_L < 3 \times 10^{10}$	0.12	1/4	Lado

Convección natural en aletas

Cierto tipo de aletas forman canales por los que el enfriamiento se da por convección natural. Dependiendo de la longitud de las aletas, se les analizará como paredes independientes o como canales.

Para placas verticales isotérmicas usadas como aletas (H = espaciamiento, L = altura)

$$Ra_H = \frac{g\beta(T_0 - T_\infty)H^3}{\nu^2} \text{Pr} \quad Ra_L = \frac{g\beta(T_0 - T_\infty)L^3}{\nu^2} \text{Pr}$$

$$Nu = \frac{hH}{k} = \left[\frac{576}{(Ra_H H / L)^2} + \frac{2.873}{(Ra_H H / L)^{0.5}} \right]^{-0.5}$$

$$H_{opt} = 2.714 \frac{L}{Ra_L^{0.25}}$$

$$Nu = \frac{hH_{opt}}{k} = 1.307$$

Todas las propiedades se evalúan a la temperatura de la película.

La condición para la transferencia de calor puede ser diferente al involucrar un flujo de calor constante. En este caso se usa un Gr modificado.

$$Ra_H = \frac{g\beta Q/A H^4}{k\nu^2} \text{Pr}$$

$$Nu_L = \frac{h_L H}{k} = \left[\frac{48}{Ra_H H / L} + \frac{2.51}{(Ra_H H / L)^{0.4}} \right]^{-0.5}$$

$$H_{opt} = 2.12 \left(\frac{H^4 L}{Ra_H} \right)^{0.2}$$

Se debe enfriar una superficie vertical caliente de 12 cm de ancho y 18 cm de alto que está en aire a 30°C por medio de un sumidero de calor con aletas igualmente espaciadas de perfil rectangular. Las aletas tienen 0.1 cm de espesor y 18 cm de largo en la dirección vertical y una altura de 2.4 cm a partir de la base. Determinar el espaciamiento óptimo de las aletas y la razón de transferencia de calor por convección natural desde el sumidero, si la temperatura de la base es de 80°C.

Se transporta vapor saturado por un tubo de acero de 2 in de diámetro calibre 80 con aislante exterior de 1 ½ in de magnesia al 85%. Se desea conocer la razón de pérdida de calor por unidad de longitud del tubo aislado si la línea de vapor está (a) horizontal y (b) vertical, en una distancia de 20 ft. El tubo está en aire inmóvil a 40°F. La temperatura de saturación del vapor a 500 psi es de 467°F. Usar las relaciones simplificadas para el aire.

Un tubo de acero de 3 in calibre 80 está cubierto con una capa de magnesia 85% de 0.06 m de espesor. La temperatura ambiente es de 25°C. La tubería contiene vapor, el cual mantiene la pared interna a 550°C. Calcule la pérdida de calor por metro de tubería y la temperatura en la interfase acero-magnesia. Repita el cálculo despreciando la resistencia del acero y calcule el porcentaje de error.