

TRANSFERENCIA DE CALOR

FACULTAD DE CIENCIAS QUÍMICAS UANL
DR. JORGE IBARRA RDZ.

El concepto de Operaciones unitarias fue acuñado en 1923 , como una aproximación a las separaciones físicas (destilación, evaporación, secado, etc.). Conlleva la idea de que existen similitudes en los fundamentos y equipo utilizado sin importar el proceso del cual se trate.

Debido a esto, los fenómenos de transporte se estudian a nivel licenciatura por ser la base y principios que se llevan a cabo en dichos procesos.

Fenómenos de
Transporte

Transferencia de calor

Transferencia de masa

Transferencia de momento

Procesos de equilibrio: La termodinámica trata básicamente con sistemas en equilibrio, además de haber diferentes tipos de equilibrio.

Velocidad de proceso: Cuando se consideran sistemas que no están en equilibrio, el sistema avanza de un modo tal que se aproxima al equilibrio. Esta velocidad está caracterizada por una fuerza impulsora. La velocidad de transporte es proporcional a la fuerza impulsora.

Variables fundamentales:

Temperatura: Puede ser definida sólo empíricamente como una medida relativa del calor. Se manifiesta en el movimiento de las moléculas.

Presión: Es el resultado de la colisión de las moléculas adyacentes de un fluido. (F/A)

Volumen: Espacio ocupado por un cuerpo.

Concentración: Cantidad de materia dentro de un espacio o volumen dado. Se utiliza usualmente en moles o masa por volumen.

Esfuerzo de corte τ : Es una fuerza ejercida por unidad de área con componentes en todas las direcciones, por lo que se provoca un rozamiento entre capas adyacentes de materia.

Flux: Es una cantidad de “algo” medida por unidad de área y unidad de tiempo. (Razón de transferencia).

Fases.

Unidades.

Transferencia de Calor

El punto de partida para el análisis de los problemas de TC es la 1ª ley de la termodinámica. Cuando se trata con la convección también debe involucrarse la ley de la conservación de la masa y la 2ª ley del movimiento de Newton.

En el análisis de TC se busca calcular la temperatura en un punto dado, la distribución de temperaturas a lo largo de una frontera o región o la razón de transferencia de calor. Así pues, las leyes físicas para el análisis de TC:

- 1ª Ley de la Termodinámica
- Conservación de la materia
- 2ª Ley del movimiento de Newton

CONDUCCIÓN

El más puro ejemplo de transporte molecular es la conducción de calor desde una región de alta temperatura a una de baja temperatura por una barra metálica.

Desde el punto de vista ingenieril, la fuerza conductora de la transferencia de calor es la diferencia de temperaturas.

ANALOGÍA

Se puede formular una ecuación general de velocidad como:

$$VT=FC/R$$

VT= Velocidad de
Transferencia

FC= Fuerza conductora

R= Resistencia

Mecanismos para la conducción:

- Interacción molecular directa
- Electrones libres

La ecuación de Fourier se expresa usando la relación de analogía:

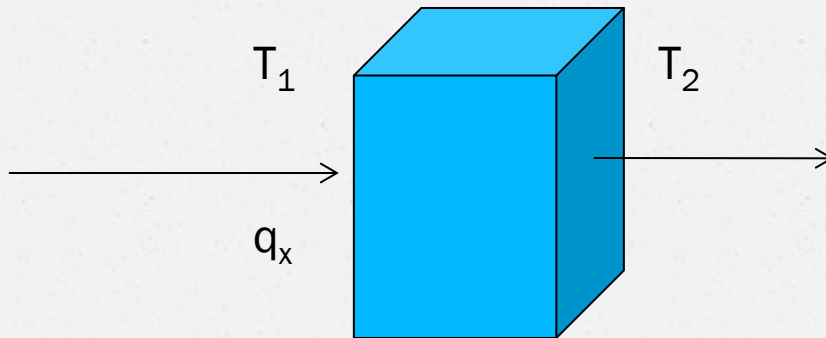
$$\left(\frac{q}{A}\right)_x = -k \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)$$

q_x = razón de flujo de calor en la dirección x

A = área normal al flujo

dT/dx = gradiente de temperatura en la dirección x

k = Conductividad térmica



CONVECCIÓN

Esta forma de transferencia involucra intercambio de energía entre un fluido y una superficie o interfase. Existe la convección libre y la convección forzada.

Convección forzada: Se obliga al fluido a moverse sobre una superficie con un agente externo.

Convección libre: El fluido se mueve como consecuencia de los cambios de densidad debidos a diferencias en temperatura sobre diferentes regiones.

Ecuación de transferencia de calor por convección:

$$q = hA(T_s - T_f)$$

q = Flujo de transferencia de calor convectivo

A = área normal a la dirección de flujo

T_s-T_f = Fuerza motriz

h = coeficiente convectivo de transferencia de calor

RADIACIÓN

No requiere de un medio para propagarse. Se trata de un fenómeno electromagnético, cuyo origen o naturaleza se desconoce aún con exactitud. La ecuación de calor para un cuerpo negro es:

$$\frac{q}{A} = \sigma T^4$$

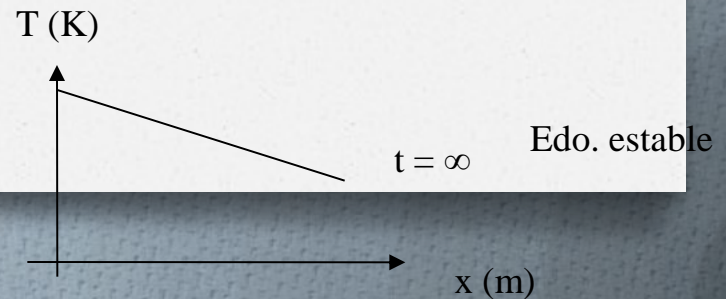
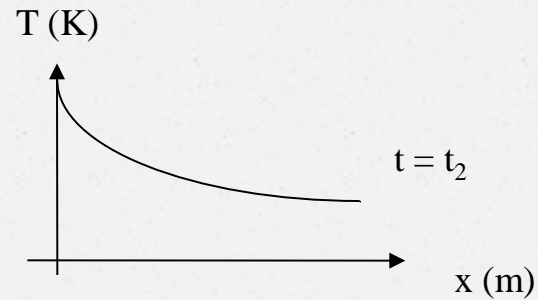
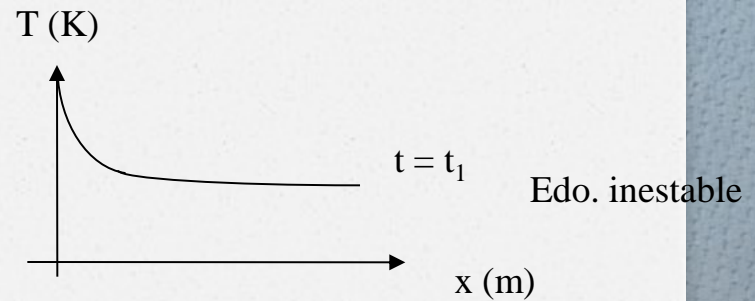
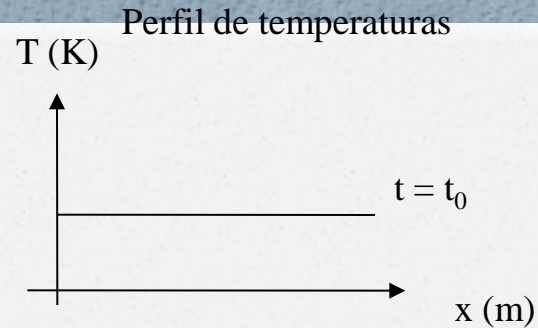
q = emisión radiante de energía

A = área de la superficie emisiva

T = temperatura absoluta de la superficie emisiva

σ = constante de Stefan-Boltzmann
5.67x10⁻⁸ W/(m²K⁴)

Transferencia de Calor



Se transfiere calor desde el vapor hasta el hielo que se funde. En estado estable, este calor transferido por unidad de área y tiempo (flujo calorífico) es directamente proporcional a la diferencia de temperaturas e inversamente proporcional a la distancia (gradiente de temperaturas $\partial T/\partial x$):

$$\left(\frac{q}{A}\right)_x = -k\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right) \quad 1^{\text{a}} \text{ ley de Fourier}$$

q = Calor transferido por unidad de tiempo J/s

A = Área m^2

k = Conductividad térmica $\text{W}/(\text{mK})$

Si se desea hacer la analogía

$$VT = q$$

$$R = \partial x/(kA)$$

$$FC = \partial T$$

En la forma matemática de la analogía se puede escribir:

$$\Psi_x = -\delta \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \quad \text{Ecuación de la razón de transferencia unidimensional}$$

Ψ_x = Razón de transferencia de lo que se transfiera en la dirección x por unidad de tiempo y área.

δ = constante de proporcionalidad

$\partial\psi/\partial x$ = derivada o gradiente de la propiedad ψ

ψ = concentración de lo transferido (unidades transferidas/unidad de volumen)

Para la 1ª Ley de Fourier:

q es la cantidad transferida (J/s).

Por tanto, ψ debe tener unidades de J/m^3 . La capacidad calorífica c_p es la propiedad que se asocia con el contenido de calor de un cuerpo ($\text{J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$). Por tanto, $c_p\cdot T$ tiene unidades J/kg . Debe incluirse entonces la densidad ρ (kg/m^3) para convertir el término ∂T en unidades J/m^3 .

El término $\rho c_p T$ es la concentración de calor, así que se llega a la forma análoga multiplicando el lado derecho de la ecn. de Fourier por $\rho c_p / \rho c_p$

$$\left(\frac{q}{A}\right)_x = -\frac{k}{\rho c_p} \left(\frac{\partial(c_p \rho T)}{\partial x}\right) = -\alpha \left[\frac{\partial(\rho c_p T)}{\partial x}\right]$$

El término $k/(\rho c_p)$ se representa por α (m^2/s) y se conoce como la difusividad térmica: $\alpha = k/(\rho c_p)$

La expresión completa para el flujo de calor es:

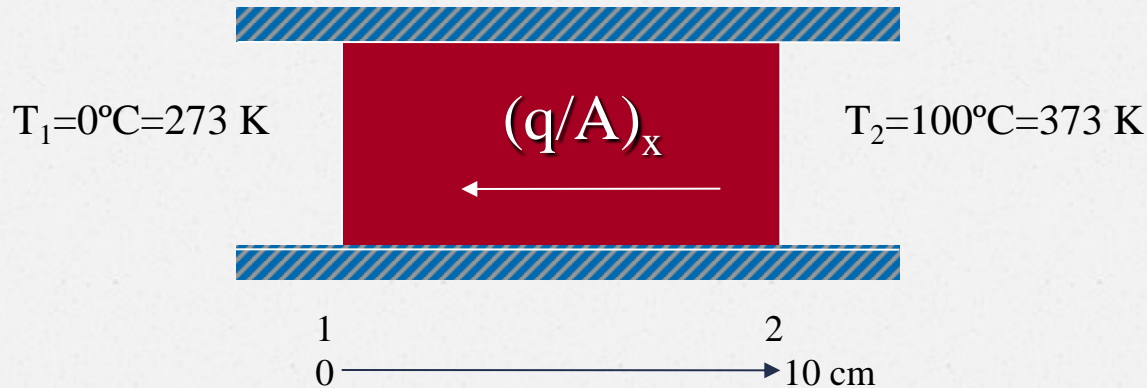
$$\left(\frac{q}{A}\right) = -k \nabla T \quad 1^a \text{ ley de Fourier}$$

q = Vector de flujo de calor (flux calorífico)

∇T = gradiente espacial de temperatura

EJEMPLO

Calcular el flujo de calor en estado estable a través de un bloque de cobre de 10 cm de grosor. Uno de los lados se mantiene a 0°C y el otro a 100°C. La conductividad térmica es de 380 W/m·K y se supone constante.



Separando las variables en la 1ª ley de Fourier se obtiene:

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{q}{A} \right)_x dx = -k \int_{T_1}^{T_2} dt$$

$$\Delta T = 100\text{ K}$$

$$\Delta x = 10\text{ cm} = 0.1\text{ m}$$

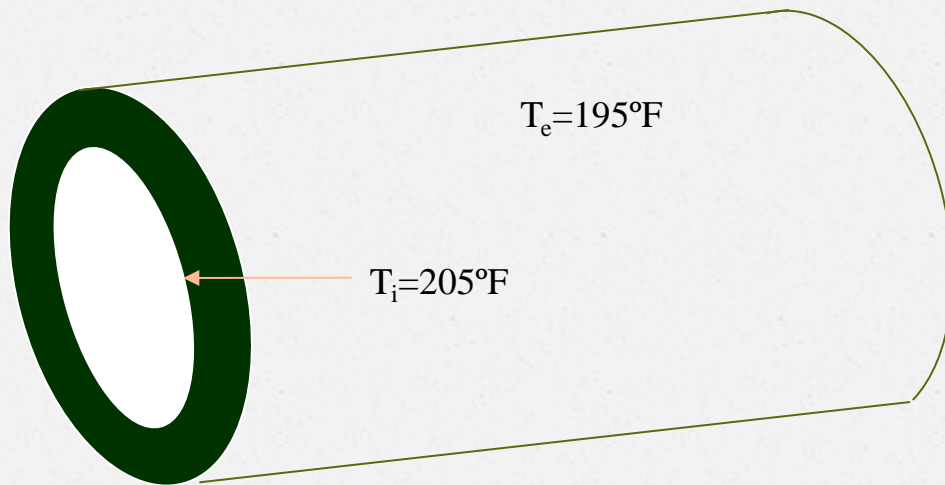
$$\left(\frac{q}{A} \right)_x (x_2 - x_1) = -k(T_2 - T_1) \quad \left(\frac{q}{A} \right)_2 = -(380)(100)/0.1 = -3.8 \times 10^5 \text{ W/m}^2$$

$$\left(\frac{q}{A} \right)_2 = -9.1 \text{ cal/cm}^2\text{s}$$

EJEMPLO

Se transporta vapor por medio de un tubo de acero de 1.5 in calibre 80 de acero suave. Las temperaturas de las paredes interior y exterior son 205 y 195 °F respectivamente. Hallar:

- Pérdida de calor en 10 ft de tubo.
- Flujo de calor en base a las áreas interna y externa.



$$q_r = -kA \frac{dT}{dr}$$

Tomando el área $A = 2\pi rL$ nos queda

$$q_r = -k(2\pi rL)dT/dr$$

Para estado estable:

$$q_r \int_{r_i}^{r_e} \frac{dr}{r} = -2\pi k L \int_{T_i}^{T_e} dT$$

$$q_r \ln \frac{r_e}{r_i} = -2\pi k L (T_e - T_i) = 2\pi k L (T_i - T_e)$$

$$q_r = \frac{2\pi k L}{\ln \frac{r_e}{r_i}} (T_i - T_e)$$

Para el acero suave $k=24.8 \text{ Btu/hr}\cdot\text{ft}\cdot^\circ\text{F}$ y para tubo 1.5 in cal. 80
 $D_e=1.9 \text{ in}$ y $D_i=1.5 \text{ in}$

$$q_r = \frac{2\pi(24.8 \text{ Btu/hr}\cdot\text{ft}\cdot^\circ\text{F})(10 \text{ ft})(10^\circ \text{ F})}{\ln \frac{1.9}{1.5}} = 65918 \text{ Btu/hr}$$

Las áreas interior y exterior son:

$$A_i = \pi(1.5/12 \text{ ft})(10 \text{ ft}) = 3.93 \text{ ft}^2$$

$$A_e = \pi(1.9/12 \text{ ft})(10 \text{ ft}) = 4.97 \text{ ft}^2$$

Por lo que los flujos son:

$$q_r/A_i = 65918/3.93 = 16773 \text{ Btu/hr}\cdot\text{ft}^2$$

$$q_r/A_e = 65918/4.98 = 13236 \text{ Btu/hr}\cdot\text{ft}^2$$

CONDUCCIÓN

La transferencia de calor por conducción se da por 2 mecanismos.

- Interacción molecular: sólidos, líquidos y gases. Las moléculas con mayor nivel de energía ceden a moléculas menos energéticas.
- Electrones libres: sólidos metálicos puros. Por la alta excitación de electrones en la banda de conducción.

$$\left(\frac{q}{A}\right) = -k\nabla T \quad 1^{\text{a}} \text{ ley de Fourier}$$

Se puede definir la relación de TC como el producto de una fuerza motriz por una conductancia térmica (ecuación de analogía).

Conductividad térmica k

Depende del medio estudiado y determina la adaptabilidad de un material al calor para un uso dado.

Dependencia de k con T

Para gases, k aumenta con la temperatura. La mayor agitación y vibración de las moléculas produce una mayor cantidad de choques y, por tanto, mayor intercambio molecular de energía.

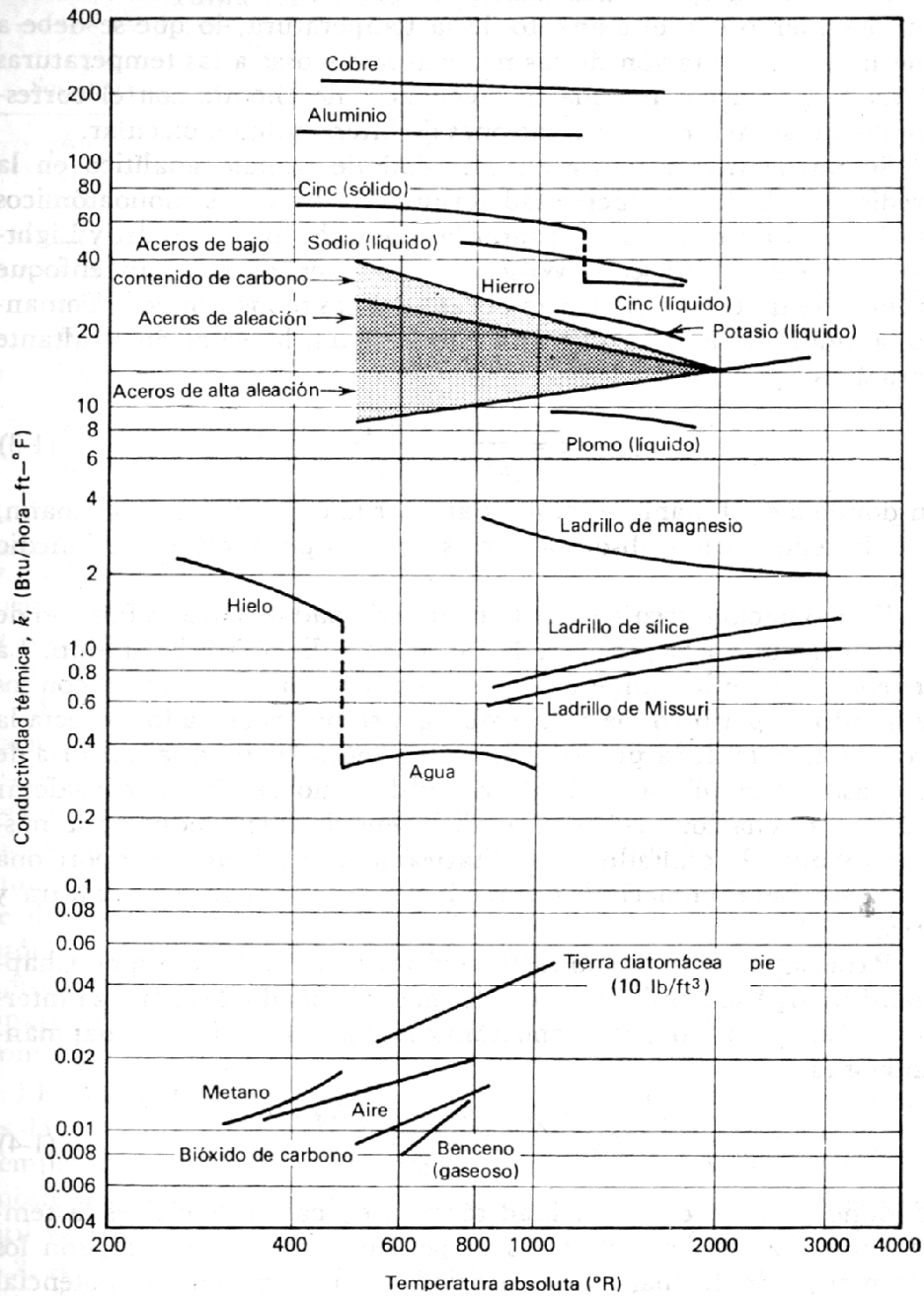


Figura 1.1 Variación en la conductividad térmica con la temperatura para distintos materiales. (De M. Jakob y B.A. Hawkins, *Elements of Heat Transfer* (Nueva York: McGraw-Hill Book Co, 1958), p. 23. Con permiso del editor.)

Para un gas monoatómico (consideración de esfera rígida)

$$k = \frac{1}{\pi^{3/2} d^2} \sqrt{\frac{K^3 T}{m}}$$

d=diámetro molecular
k=cte. De Boltzmann
m=masa por molécula

Considerando la teoría de Chapman-Enskog (gas monoatómico)

$$k = \frac{1.9891 \times 10^{-4} \sqrt{T/M}}{\sigma^2 \Omega_k}$$

M=Peso molecular
 σ y Ω_k = Parámetros de Lennard-Jones

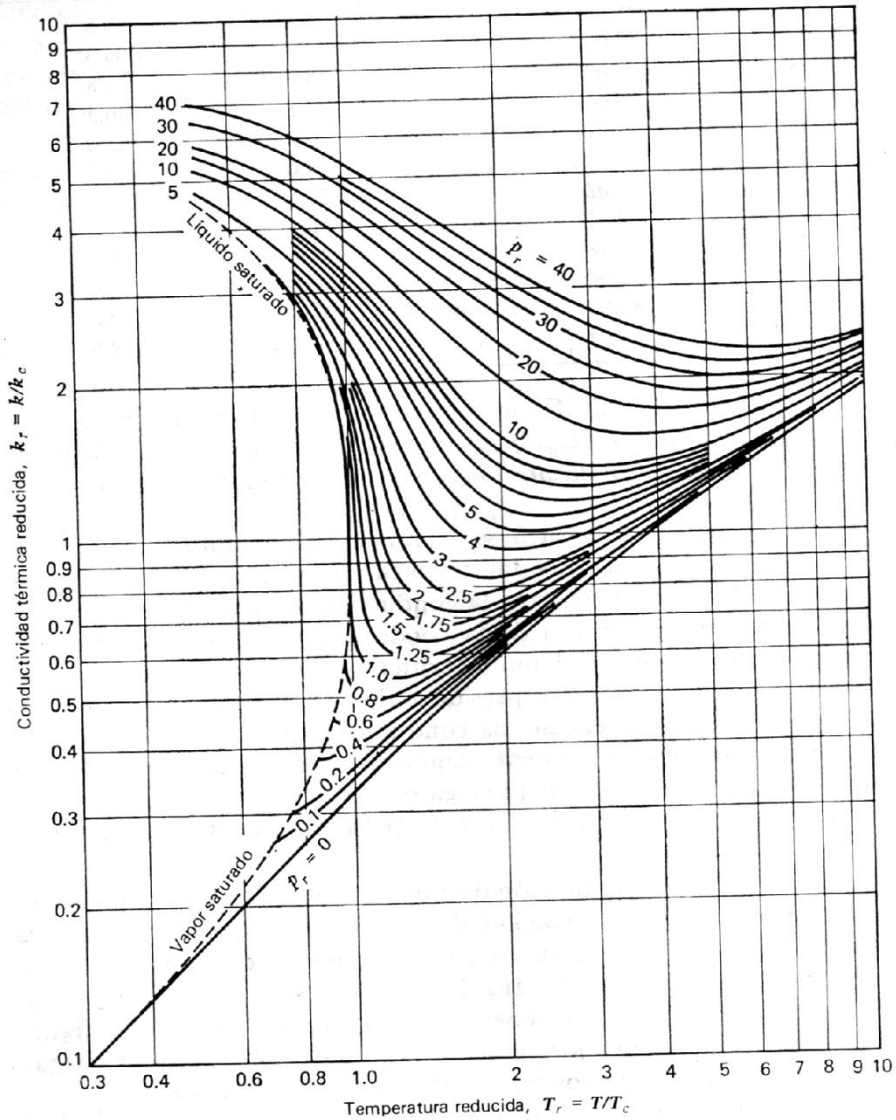


Figura 1.2 Conductividad térmica reducida en función de la temperatura y presión reducidas para gases monoatómicos. (De E. J. Owens y G. Thodos, *AIChE Journal* 3 (1958): 461. Con permiso del editor.)

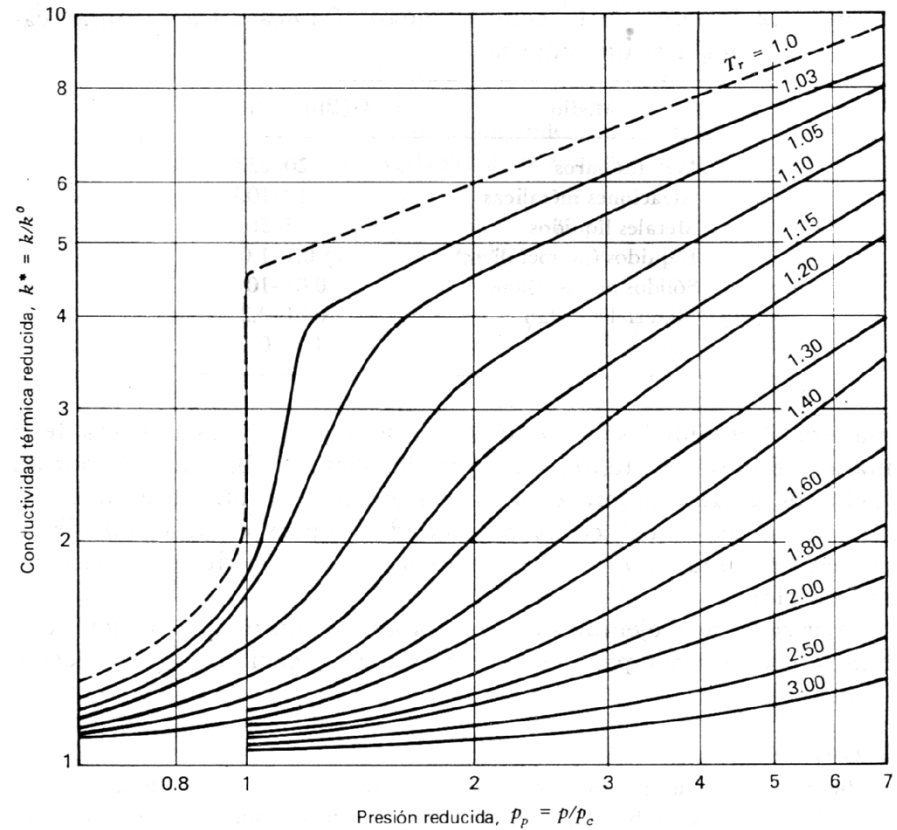


Figura 1.3 Conductancia térmica reducida en función de la temperatura y presión reducidas. (De H.J.N. Lenoir, W.A. Junk y E.W. Comings, *Chem. Engr. Progress* 49 (1953): 539. Con permiso del editor.)

Para materiales sólidos y líquidos, debido a la densidad atómica, la conductividad térmica es completamente independiente de la presión y menos dependiente de la temperatura.

En los metales puros, hay electrones libres que aumentan la capacidad de conducción.

TEORÍA CINÉTICA DE LOS GASES

La teoría cinética de los gases intenta explicar las propiedades de los gases en base a la molécula: es la menor cantidad de sustancia que retiene sus propiedades químicas.

Las más importantes suposiciones de la TCG:

- La molécula es la cantidad apropiada de sustancia a tratar.
- Las leyes de conservación de la mecánica son válidas: conservación de momento y energía.
- El comportamiento del gas es descrito por el comportamiento promedio de las moléculas.
- Las moléculas son idealizadas como esferas rígidas, elásticas y lisas, de diámetro d .
- Se desprecia la presencia de fuerzas de largo alcance.

Trayecto libre promedio: Es la distancia promedio que viaja una molécula antes de chocar con una superficie u otra molécula (o promedio estadístico de la distribución de velocidades causada por la distribución de temperaturas en la muestra de moléculas de gas en un contenedor de temperatura y presión promedio).

En el caso de una molécula durante un largo período de tiempo t en el que recorre una distancia L :

$$L = U t$$

El número de colisiones en este lapso de tiempo es Θt

La distancia libre promedio λ es la distancia promedio entre colisiones y L es también el producto de la distancia λ por el número de colisiones:

$$L = U t = \lambda \Theta t \quad \text{despejando para } \lambda: \quad \lambda = U/\Theta$$

Tomando en cuenta la concentración molecular en mol/m^3 (número total de moléculas en el volumen total de gas):

$$C_m = C_T N = \rho / m = \rho N / M$$

N =# de Avogadro

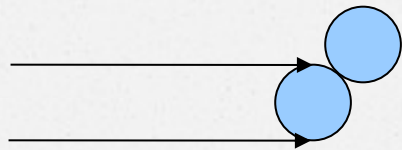
C_T =Conc. Total molar

ρ =densidad (kg/m^3)

m =masa de una molécula ($\text{kg}/\text{molécula}$)

M =Peso molecular (kg/kmol)

Para un gas ideal: $C_T = n / V$



$$C_m = C_T N = \frac{nN}{V} = \frac{pN}{RT} = \frac{p}{(R/N)T} = \frac{p}{k_B T}$$

Cualquier molécula que esté en contacto con el cilindro de influencia será colisionada por nuestra molécula, por lo que la región de influencia será un círculo de diámetro $2d$. El número de moléculas que chocan por unidad de tiempo (frecuencia de colisiones) será:

$$\Theta = \pi d^2 U C_m$$

Tomando en cuenta un promedio de velocidad y ángulos de choque (90° en promedio)

$$\Theta = 2^{1/2} \pi d^2 \bar{U} C_m$$

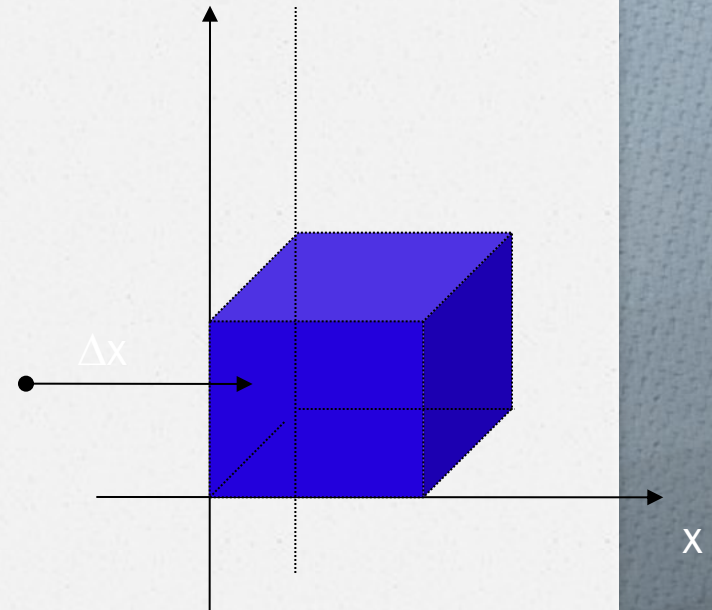
$$\lambda = \frac{\bar{U}}{\Theta} = \frac{1}{2^{1/2} \pi d^2 C_m} = \frac{k_B T}{\sqrt{2} \pi d^2 p}$$

Se obtiene la velocidad promedio entonces como:

$$U = \left(\frac{8k_B T}{\pi m} \right)^{1/2}$$

BALANCE DE TRANSPORTE

Se asume que la variación en la concentración de propiedad es uniforme en la dirección x . Se toma entonces el flux Ψ_A a través de un plano colocado en $x = 0$. El número de moléculas que cruzan el plano por unidad de tiempo y área será proporcional a $1/6C_m U$. Cada una de las moléculas que cruzan el plano tiene la propiedad ψ_m característica de la región de donde proviene. La región o fuente se indicará por Δx . Δx es del mismo orden de magnitud que λ (trayecto libre promedio).



Balance sobre el plano

Transporte del lado izq. = $1/6 C_m U \psi_{m1} (\Delta x)$

La propiedad ψ_{m2} es $\psi_{m2} = \psi_{m1} + d\psi_m/dx (2\Delta x)$

Transporte del lado der. = $1/6 C_m U \psi_{m2} (\Delta x)$

La cantidad neta de propiedad transportada a través de la unidad de área y tiempo es igual a la resta de ψ_{m2} y ψ_{m1}

$$\Psi_A = \frac{1}{6} C_m U \Delta x (\psi_{m1} - \psi_{m2}) = \frac{1}{6} C_m U \Delta x \left(-\frac{d\psi_m}{dx} \right) (2\Delta x)$$

$$\Psi_A = -\frac{1}{3} C_m U \lambda \frac{d\psi_m}{dx}$$

Se ha establecido Δx como del mismo orden de magnitud que λ ,

$$\Psi_A = -\frac{1}{3} C_m U \lambda \frac{d\psi_m}{dx}$$

La energía intercambiada en la colisión entre dos moléculas de masa m es del tipo traslacional:

$$\psi_m = \frac{mv^2}{2} \quad v^2 = \text{cuadrado de la velocidad promedio}$$

Puede demostrarse que la presión ejercida por las moléculas de un gas es:

$$p = \frac{1}{3} C_m m \bar{v}^2$$

Multiplicando esta ecuación por el volumen V

$$pV = \frac{C_m V}{3} m \bar{v}^2 = \frac{2}{3} nN \frac{m \bar{v}^2}{2} = nN \frac{RT}{N} \quad C_m = C_T N = \frac{nN}{V} = \frac{pN}{RT} = \frac{p}{(R/N)T} = \frac{p}{k_B T}$$

Así que en términos de la constante de Boltzmann:

$$\frac{m \bar{v}^2}{2} = \frac{3RT}{2N} = \frac{3k_B T}{2}$$
$$\psi_m = \frac{3k_B T}{2}$$

Combinando las ecuaciones correspondientes obtenemos el flux calorífico

$$\left(\frac{q}{A}\right)_x = -\frac{C_m \bar{U} \lambda k_B}{2} \frac{dT}{dx} \quad \left\{ \begin{array}{l} \psi_m = \frac{3k_B T}{2} \\ \Psi_A = -\frac{1}{3} C_m \bar{U} \lambda \frac{d\psi_m}{dx} \end{array} \right.$$

Comparando con la ecuación de Fourier:

$$k = C_m \bar{U} \lambda k_B / 2$$

Se pueden realizar operaciones adicionales tomando en cuenta la capacidad calorífica ($mv^2/2 = mc_v T$, por lo que $mc_v = 3k_B/2$ y entonces):

$$k = \frac{1}{3} m C_m \bar{U} \lambda c_v = \frac{1}{3} \rho \bar{U} \lambda c_v$$

C_v = capacidad calorífica a
volumen constante (kJ/(kg K))

Existen teorías con un tratamiento más realista y riguroso de los gases, como la teoría del gas no uniforme (Chapman-Enskog):

- El gas está lo suficientemente diluido
- El movimiento de las moléculas está descrito por la mecánica clásica
- Las colisiones son elásticas
- Las fuerzas intermoleculares no dependen del ángulo.

$$T^* = \frac{T}{\varepsilon / k_B}$$

$$\Omega_\mu = \frac{A}{(T^*)^B} + \frac{C}{\exp(DT^*)} + \frac{E}{\exp(FT^*)}$$

$$A = 1.16145 \quad B = 0.14874 \quad C = 0.52487$$

$$D = 0.7732 \quad E = 2.16178 \quad F = 2.43787$$

$$k = 8.3224 \times 10^{-22} \left(\frac{(T/M)^{1/2}}{\sigma^2 \Omega_\mu} \right)$$

$$\sigma \left(\frac{p_c}{T_c} \right) = (10^{-10})(2.3551 - 0.087\omega)$$

$$\frac{\varepsilon / k_B}{T_c} = 0.7915 + 0.1693\omega$$

ε = energía característica de interacción
 σ = diámetro característico de colisión, m
 k [=] $\text{W m}^{-1} \text{K}^{-1}$
 M = Peso molecular, kg/kmol
 T = Temperatura absoluta, K
 p_c = Presión crítica (atm)
 T_c = Temperatura crítica (K)
 ω = Factor acéntrico

$$k = \frac{5}{2} c_v \mu$$

Gases poliatómicos:

Se considera que k obtenida anteriormente es debida a movimiento traslacional únicamente, de modo que se suma a otras contribuciones para obtener la correlación de Eucken y de Eucken modificada.

$$\frac{k}{\mu} = c_v \left(\frac{9\gamma - 5}{4} \right) = c_p + \frac{5R}{4M} = c_v + \frac{9R}{4M}$$

$$\frac{k}{\mu} = c_v \left(\frac{7.032\gamma - 1.720}{4} \right) = 1.32c_v + \frac{1.4728 \times 10^4}{M} = 1.32 \frac{c_p}{\gamma} + \frac{1.4728 \times 10^4}{M}$$

$$\gamma = c_p/c_v$$

Líquidos

No existe aún una teoría predictiva para la conductividad a partir de información fundamental, solamente aproximaciones semi teóricas.

$$k = \frac{1.105}{M^{1/2}} \frac{c_p}{c_{pe}} \left(\frac{\rho}{\rho_e} \right)^{4/3} \frac{T_e}{T}$$

e se refiere al punto de ebullición
T en K, M es el peso molecular en kg/kmol
y k está en $W m^{-1} K^{-1}$

Sólidos

No existe tampoco aún una teoría que determine las conductividades en sólidos. Afortunadamente, esta propiedad es fácilmente medible, contrario a los casos de gases y líquidos.

Balance o conservación

ENTRADAS + GENERACIÓN = SALIDA + ACUMULACIÓN

$$(\Psi_x A)_1 + \text{Generación} = (\Psi_x A)_2 + \text{Acumulación}$$

$$\text{Generación} = (\psi_g V)$$

$$\text{Acumulación} = (\partial \psi / \partial t)(V)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} - \dot{\psi}_g = - \frac{\partial \Psi_x}{\partial x}$$

Transporte molecular y convectivo

Transporte molecular $\Psi_m = -\delta \nabla \psi$

Transporte convectivo $\Psi_{x,c} = \psi \mathbf{U}_x$

$$\Psi_x = \Psi_{x,m} + \Psi_{x,c} = -\delta \frac{\partial \psi}{\partial x} + \psi \mathbf{U}_x$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\delta \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + \frac{\partial (\psi \mathbf{U}_x)}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} - \dot{\psi}_g = \delta \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial (\psi \mathbf{U}_x)}{\partial x}$$

LA ECUACIÓN DE BALANCE EN 3 DIMENSIONES

Un elemento de volumen es $dV = dx dy dz$

El término de generación en este elemento será $\psi_g dV = \psi_g dx dy dz$

Lo mismo aplica para la acumulación $(\partial \psi / \partial t) dV = (\partial \psi / \partial t) dx dy dz$

Sin embargo, las entradas y salidas deben analizarse sobre caras paralelas en lados opuestos del elemento de volumen considerado.

Las entradas y salidas se definen de forma similar

Entradas: $\Psi_{x1} dy dz + \Psi_{y1} dx dz + \Psi_{z1} dx dy$

Salidas: $\Psi_{x2} dy dz + \Psi_{y2} dx dz + \Psi_{z2} dx dy$

Pero de la definición de derivada

$$\Psi_{x2} = \Psi_{x1} + (\partial \Psi_x / \partial x) dx$$

Al introducir todos los términos y simplificar en la ecuación de balance, se obtiene

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} - \dot{\psi}_g = - \left(\frac{\partial \Psi_x}{\partial x} + \frac{\partial \Psi_y}{\partial y} + \frac{\partial \Psi_z}{\partial z} \right)$$

En el teorema de divergencia se aplica el operador ∇ a un vector

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} - \dot{\psi}_g = -(\nabla \cdot \Psi)$$

Si se aplica el mismo teorema al término convectivo únicamente

$$(\nabla \cdot \psi \mathbf{U}) = \frac{\partial(\psi U_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\psi U_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\psi U_z)}{\partial z}$$

$$(\nabla \cdot \psi \mathbf{U}) = \psi \left(\frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} + \frac{\partial U_z}{\partial z} \right) + U_x \frac{\partial \psi}{\partial x} + U_y \frac{\partial \psi}{\partial y} + U_z \frac{\partial \psi}{\partial z}$$

Ahora obsérvense los términos y hágase notar que

$$(\mathbf{U} \cdot \nabla)\psi = U_x \frac{\partial \psi}{\partial x} + U_y \frac{\partial \psi}{\partial y} + U_z \frac{\partial \psi}{\partial z}$$

Y que

$$\psi(\nabla \cdot \mathbf{U}) = \psi \left(\frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} + \frac{\partial U_z}{\partial z} \right)$$

Por tanto

$$(\nabla \cdot \psi \mathbf{U}) = \psi(\nabla \cdot \mathbf{U}) + (\mathbf{U} \cdot \nabla)\psi$$

Para obtener la divergencia sobre el vector total Ψ :

$$(\nabla \cdot \Psi) = (\nabla \cdot -\delta \nabla \psi) + (\nabla \cdot \psi \mathbf{U})$$

Así que se obtiene la ecuación general de balance sustituyendo todos los términos

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} - \dot{\psi}_g = (\nabla \cdot \delta \nabla \psi) - (\nabla \cdot \psi \mathbf{U})$$

Que se rearrregla del modo más común

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla)\psi = \dot{\psi}_g + (\nabla \cdot \delta \nabla \psi) - \psi(\nabla \cdot \mathbf{U})$$

Ecuación general de balance de propiedad (TC)

$$\frac{\partial(\rho c_p T)}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla)(\rho c_p T) = \dot{q}_g + \left(\nabla \cdot \alpha \nabla(\rho c_p T) \right) - (\rho c_p T)(\nabla \cdot \mathbf{U})$$

Ejemplo: Obtenga la ecuación tridimensional para transferencia de calor en notación vectorial y muestra la forma que se obtiene para propiedades constantes. Expresé esta ecuación completamente en coordenadas rectangulares.

Para un sistema sin fuentes de calor:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \nabla^2 T$$

Segunda ley de Fourier

Para un sistema en estado estable con fuentes de calor:

$$\nabla^2 T + \frac{\dot{q}_g}{k} = 0$$

Ecuación de Poisson

Para un sistema sin fuentes de calor y en estado estable:

$$\nabla^2 T = 0$$

Ecuación de Laplace

CONDUCCIÓN DE CALOR EN ESTADO ESTABLE

Para la conducción de calor en estado estable sin generación interna de calor, se aplica la ecn. De Laplace y cuando existe generación, la de Poisson:

$$\nabla^2 T = 0$$

$$\nabla^2 T + \frac{\dot{q}}{k} = 0$$

Sistemas unidimensionales sin generación:

Se utiliza la ecuación de Laplace.

Tipo de sistema	Rectangular	Cilíndricas	Esféricas
Ecuación a usar	$\frac{d^2 T}{dx^2} = 0$	$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) = 0$	$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dT}{dr} \right) = 0$

La transferencia de calor a través de un medio es tridimensional en el más general de los casos.

Por tanto, la distribución de temperaturas dentro de ese medio, así como la transferencia de calor en cualquier ubicación se pueden describir por un conjunto de tres coordenadas.

Tipo de conducción	Sistema cartesiano	Sistema cilíndrico	Sistema esférico
Tridimensional	x, y, z $T(x,y,z)$	r, ϕ, z $T(r, \phi, z)$	r, ϕ, θ $T(r, \phi, \theta)$
Bidimensional	x, y	r, θ	r, θ
Unidimensional	x	r	r

Ecuación unidimensional combinada

Podemos expresar los tres tipos de sistemas por una sola ecuación:

$$\frac{1}{r^n} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^n k \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \dot{q} = 0$$

Donde $n=0$ para una pared plana, $n=1$ para un cilindro y $n=2$ para una esfera.

Condiciones de Frontera

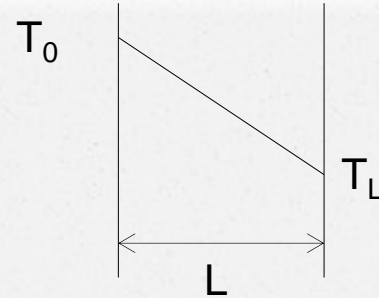
El flujo de calor y el perfil de temperatura dependen de las condiciones de las superficies. La expresión matemática de las condiciones térmicas en las fronteras se llama condiciones de frontera. Para solucionar un problema de TC, deben darse *dos* condiciones en la frontera para cada dirección del sistema de coordenadas.

Las condiciones frontera más comunes son:

- De temperatura específica
- De flujo específico de calor
- De convección
- De radiación

En una superficie, sin embargo, pueden darse todos los tipos de transferencia de calor simultáneamente, de modo que las condiciones de frontera deben obtenerse de un balance de energía superficial.

El caso de una pared plana



Las condiciones frontera que deben satisfacerse son:

$$\begin{aligned} \text{en } x = 0 & \quad T(0) = T_0 \\ \text{en } x = L & \quad T(L) = T_L \end{aligned}$$

Resolviendo la ecuación de Laplace para este caso:

$$T(x) = C_1 x + C_2$$

Se aplican las condiciones de frontera para evaluar C_1 y C_2 :

$$T_0 = C_2$$

$$T_L = C_1 L + C_2$$

$$T_L - T_0 = C_1 L$$

$$C_1 = (T_L - T_0) / L$$

Luego se sustituyen las constantes en la solución:

$$T(x) = \frac{T_L - T_0}{L} x + T_0 = T_0 - \frac{T_0 - T_L}{L} x$$

Si se considera la 1a. Ley de Fourier para calcular el flujo de calor y utilizamos la solución de la ecuación de Laplace para resolverla:

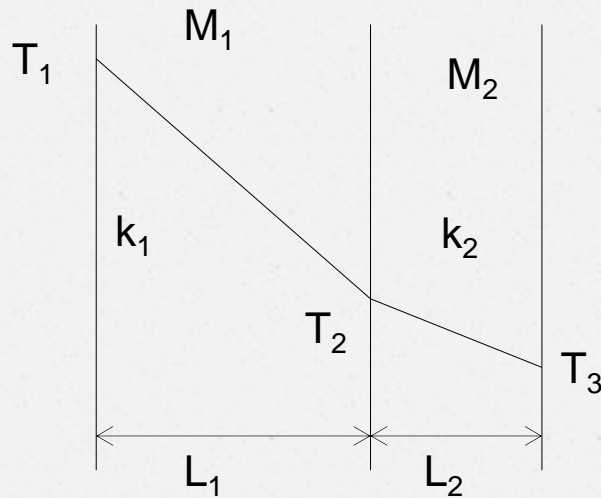
$$T(x) = T_0 - \frac{T_0 - T_L}{L} x$$

$$\frac{dT}{dx} = -\frac{T_0 - T_L}{L}$$

$$q_x = -kA \left(-\frac{T_0 - T_L}{L} \right) = \frac{kA}{L} (T_0 - T_L)$$

El término kA/L se conoce como la conductancia térmica de la pared. El inverso $L/(kA)$ se conoce como la resistencia térmica.

Considérese una pared compuesta por 2 materiales, cada uno tiene su propia expresión de calor con la misma forma, difiriendo en los límites.



$$q_{M_1} \int_0^{L_1} dx = -k_1 A \int_{T_1}^{T_2} dT$$

$$q_{M_1} = \frac{k_1 A}{L_1} (T_1 - T_2)$$

Para el material M2 se obtiene:

$$q_{M_2} = \frac{k_2 A}{L_2} (T_2 - T_3)$$

Como se tiene estado estable, todos los calores deben ser iguales, y si se expresan las temperaturas en función de los calores:

$$T_1 - T_2 = q \left(\frac{L_1}{k_1 A} \right)$$

$$T_2 - T_3 = q \left(\frac{L_2}{k_2 A} \right)$$

Así que si se suman las dos expresiones, se obtiene:

$$T_1 - T_2 + T_2 - T_3 = q \left(\frac{L_1}{k_1 A} \right) + q \left(\frac{L_2}{k_2 A} \right) = q \left(\frac{L_1}{k_1 A} + \frac{L_2}{k_2 A} \right)$$

$$q = \frac{T_1 - T_3}{\frac{L_1}{k_1 A} + \frac{L_2}{k_2 A}}$$

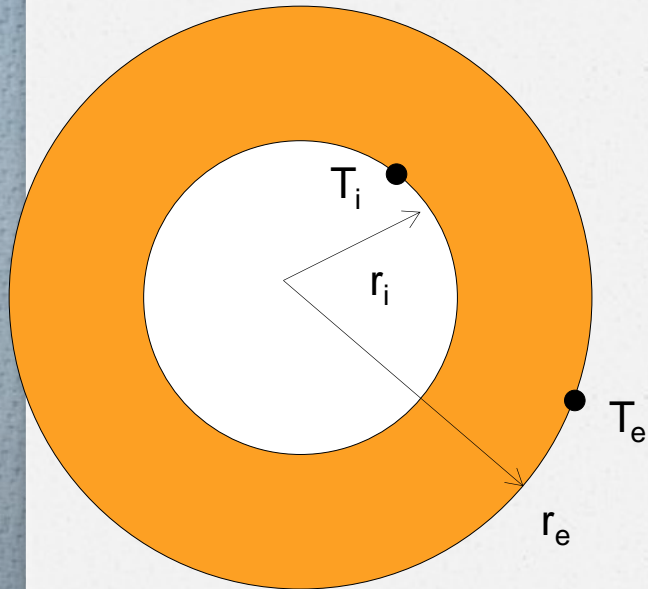
Cada término es la resistencia térmica, de modo que podemos decir:

$$q = \frac{\Delta T}{\sum R_t}$$

Se construye una pared de horno con ladrillo de arcilla refractaria de 3 in ($k = 0.65 \text{ Btu/ht-ft-}^\circ\text{F}$) y acero suave de $\frac{1}{4}$ de pulgada ($k = 24 \text{ Btu/hr-ft-}^\circ\text{F}$) en el exterior. La superficie interior del tabique está a $1200 \text{ }^\circ\text{F}$ y la del acero en el exterior a $278 \text{ }^\circ\text{F}$. Encontrar

- el flujo de calor a través de cada pie cuadrado de acero.
- la temperatura en la interfase ladrillo - acero.

El caso de cilindros huecos o tubos



$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) = 0$$

$$\frac{dT}{dr} = \frac{c_1}{r}$$

$$T = c_1 \ln r + c_2$$

Si se aplican las condiciones frontera $T(r_i) = T_i$ y $T(r_e) = T_e$

$$c_1 = - \frac{T_i - T_e}{\ln \frac{r_e}{r_i}}$$

$$c_2 = T_i - c_1 \ln r_i$$

$$T_i - T(r) = \frac{\ln \frac{r}{r_i}}{\ln \frac{r_e}{r_i}} (T_i - T_e)$$

Se sustituyen las constantes y derivadas obtenidas en la ecuación de Fourier en forma cilíndrica para obtener el flujo de calor en un tubo:

$$q_r = \frac{2\pi kL}{\ln \frac{r_e}{r_i}} (T_i - T_e)$$

El caso de esferas huecas

Si se realiza el mismo tipo de procedimiento para una esfera hueca, se obtiene la expresión de flujo de calor y por tanto, la resistencia.

$$q_r = \frac{4\pi r_i r_e k}{r_e - r_i} (T_i - T_e)$$

$$R_t = \frac{r_e - r_i}{4\pi r_i r_e k}$$

Condición de frontera de flujo específico de calor

En algunas ocasiones puede ser posible medir el flujo de calor que pasa por una superficie, W/m^2 , por lo que esa información se puede utilizar como condición frontera. Se usa la ecuación de Fourier para expresarla:

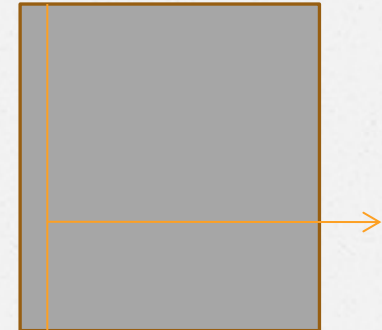
$$\frac{q}{A} = -k \frac{\partial T}{\partial x} = \text{Flujo de calor en } x \text{ (W/m}^2\text{)}$$

Fronteras aisladas

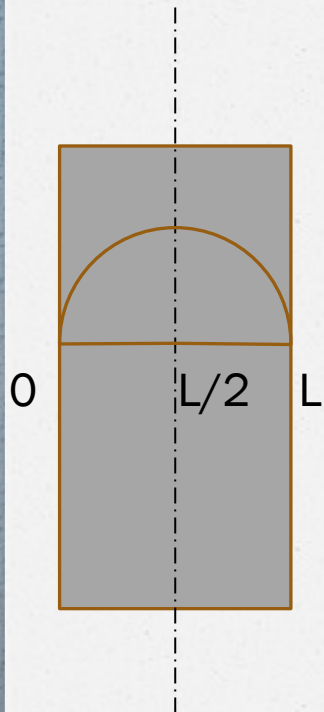
La transferencia de calor a través de una superficie aislada se puede tomar como cercanamente cero, por lo que el flujo específico de calor en su superficie es cero. La condición de frontera sobre una superficie perfectamente aislada es:

$$k \frac{\partial T(0)}{\partial x} = 0 \quad \text{o} \quad \frac{\partial T_0}{\partial x} = 0$$

La derivada de la temperatura con respecto a la variable espacial en la dirección normal a esa superficie es cero; esto significa que la función de la temperatura debe ser *perpendicular* a la superficie de aislamiento.



Simetría térmica



En algunos problemas de TC se tiene la simetría térmica en cuerpos simétricos. Por ejemplo cuando una placa caliente se suspende en aire frío. Se tiene simetría térmica sobre el plano central en $x=L/2$. La dirección del flujo de calor se dará hacia la superficie más cercana y en el plano central no habrá flujo de calor. El plano central se puede perfilar como una superficie aislada y es una solución muy parecida al caso anterior.

$$\frac{\partial T(L/2)}{\partial x} = 0$$

Condición de convección

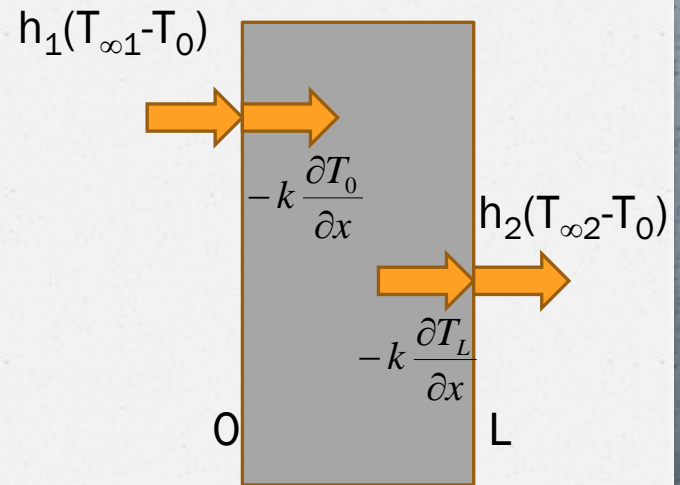
La mayor parte de los problemas prácticos de TC involucran el contacto con un medio fluido en una superficie. Estas condiciones frontera se resuelven por un balance de energía superficial:

Conducción en la superficie = Convección en la superficie

Para una placa de espesor L , las condiciones en las superficies son:

$$-k \frac{\partial T(0)}{\partial x} = h_1 [T_{\infty 1} - T(0)]$$

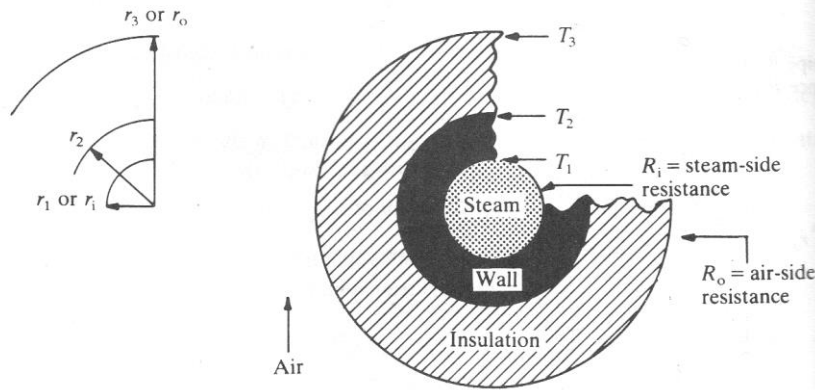
$$-k \frac{\partial T(L)}{\partial x} = h_2 [T(L) - T_{\infty 2}]$$



Radio Crítico de Aislamiento

El aislamiento sobre paredes es efectivo debido al área constante que se maneja y ésta tiene un efecto obvio sobre la ecuación de transferencia de calor. Sin embargo, ocurre algo diferente al aplicar aislante sobre un cilindro. Al aumentar el espesor de aislamiento, también se incrementa el área expuesta a la convección, como puede suponerse de la ecuación para el área de un cilindro $A_c = 2\pi rL$.

El radio de un cilindro al cual se encuentra un máximo en la transferencia de calor se conoce como “radio crítico de aislamiento”. Es decir, al aumentar el espesor de un cilindro se observa que aumenta la transferencia de calor hasta un valor máximo, tras lo cual la transferencia de calor empieza a disminuir.



$$\sum R_t = \frac{\ln r_o/r_2}{2\pi kL} + \frac{1}{h_o A_o} = \frac{\ln r_o/r_2}{2\pi Lk} + \frac{1}{h_o(2\pi Lr_o)}$$

FIGURE 11.5
An insulated pipe with convection.

$$q_r = \frac{T_2 - T_\infty}{\frac{\ln r_o/r_2}{2\pi Lk} + \frac{1}{h_o(2\pi Lr_o)}} = 2\pi L \Delta T \left(\frac{\ln r_o/r_2}{k} + \frac{1}{h_o r_o} \right)^{-1}$$

$$\frac{dq}{dr_o} = 0 = -2\pi L(T_2 - T_\infty) \left(\frac{\ln r_o/r_2}{k} + \frac{1}{h_o r_o} \right)^{-2} \left(\frac{1}{r_o k} - \frac{1}{h_o r_o^2} \right)$$

$$\frac{1}{r_o k} - \frac{1}{h_o r_o^2} = 0$$

$$r_{o,c} = \frac{k}{h_o}$$

PROBLEMAS Y EJERCICIOS

Dos cilindros de materiales diferentes se ponen en contacto. El cilindro 1 tiene 2 m de longitud con un área transversal de 0.03 m^2 y $k = 0.7 \text{ W}/(\text{m K})$. El cilindro 2 es de 3 m de longitud con área transversal de 0.04 m^2 y $k = 1.2 \text{ W}/(\text{m K})$. Las temperaturas en los extremos son 280 K (T_1) y 310 K (T_3). Encuentre la temperatura T_2 en el punto en que los cilindros están en contacto.

Imagine el mismo problema que el anterior, pero para el cilindro 2 no se conoce la conductividad k . Si la temperatura en el punto de unión es 300 K, halle la conductividad térmica del cilindro 2.

Obtenga una expresión para el flujo de calor y para la resistencia en una esfera hueca, sabiendo que $A = 4\pi r^2$.

Problemas y ejercicios

Considere un tubo con vapor de agua de longitud $L=20$ m, radio interior $r_i=6$ cm, radio exterior $r_e=8$ cm y conductividad térmica $k=20$ W/m°C. Las superficies interior y exterior del tubo se mantienen a las temperaturas promedio de $T_i=150^\circ\text{C}$ y $T_e=60^\circ\text{C}$, respectivamente. Determine la razón de pérdida de calor del vapor a través de las paredes del tubo.

Considere la placa base de una plancha doméstica de 1200 W que tienen un espesor de $L=0.5$ cm, con área de $A=300$ cm² y conductividad térmica $k=15$ W/m·K. La superficie interior de la placa base se sujeta a un flujo de calor uniforme generado por las resistencias del interior de la plancha, y el exterior pierde calor por convección hacia los alrededores que están a una temperatura $T_\infty=20^\circ\text{C}$. Tomando el coeficiente $h=80$ W/m²·K y descartando la pérdida de calor por radiación, obtenga una expresión para el perfil de temperatura en la placa base y evalúe las temperaturas en las superficies exterior e interior.

Se vacía una columna cilíndrica de concreto de 3 ft empleada para la construcción de un puente. La longitud de la columna es tal que se desprecia la variación de la temperatura en su dirección de la longitud. Si se trata a la columna como concreto sólido con $k=0.54$ Btu/hr·ft·°F, determinar la temperatura al centro del cilindro, tomando en cuenta que la temperatura en la superficie de la columna es de 180°F . Se puede considerar que el calor de hidratación del concreto es igual a 1.1 Btu/lb_m·hr, con una densidad promedio de 150 lb/ft³.

Superficies extendidas

Para aumentar la transferencia de calor entre una superficie y un fluido, se aumenta el área de contacto entre el metal y el fluido que es mal conductor. Esto se logra con álabes, puntas y otros tipos de superficies.

En estado estable, el análisis sobre un elemento de la aleta se tiene:

Análisis del modelo: $\frac{dq}{dt} = 0$

1. T varia en dos dimensiones, pero la variación en x es más importante
2. Se pierde una cantidad de calor muy pequeña por los extremos
3. El coeficiente h de TC es función de la posición.

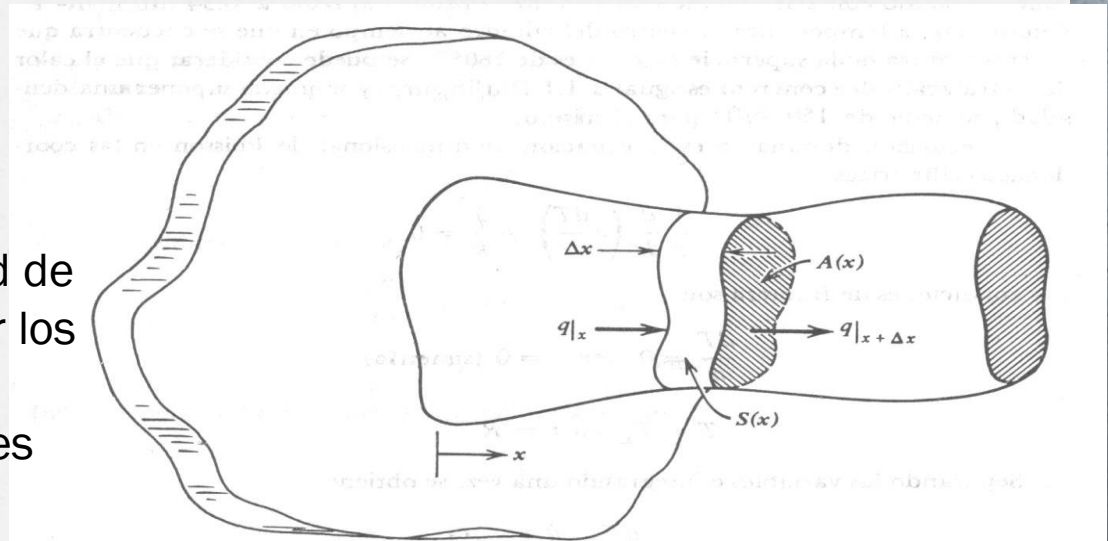


Figura 4.5 Una superficie extendida de configuración general.

$$\frac{\partial(\rho c_p T)}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla)(\rho c_p T) = \dot{q}_g + \left(\nabla \cdot \alpha \nabla(\rho c_p T) \right) - (\rho c_p T)(\nabla \cdot \mathbf{U})$$

Considerando un balance de energía en un elemento de la aleta, tenemos que la energía de entrada por conducción en x es igual a la energía de salida en $x+\Delta x$ más la energía de salida por convección:

$$q_x|_x - q_x|_{x+\Delta x} - q_{\text{conv}} = 0$$

$$kA \frac{dT}{dx} \Big|_{x+\Delta x} - kA \frac{dT}{dx} \Big|_x - hS(T - T_\infty) = 0$$

$$\frac{kA \frac{dT}{dx} \Big|_{x+\Delta x} - kA \frac{dT}{dx} \Big|_x}{\Delta x} - hP(T - T_\infty) = 0$$

$$\frac{d}{dx} \left[kA(x) \frac{dT}{dx} \right] - hP(x)[T - T_\infty] = 0$$

Tomando el área del segmento de la aleta como el producto del perímetro P por el grosor del elemento Δx , $S=P\Delta x$

Tomando el límite cuando $\Delta x \rightarrow 0$.

Aletas de sección transversal uniforme

En este caso el área y el perímetro son constantes a lo largo de x . Si se tiene también como constantes a k y h , se obtiene la ecuación para este caso:

$$\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{hP}{kA}(T - T_\infty) = 0$$

Solución

Se realiza un cambio de variable con sustitución de $hP/(kA)=m^2$, y $\theta=T-T_\infty$ para tener la ecuación en la forma:

$$\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{hP}{kA}(T - T_\infty) = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{d^2\theta}{dx^2} - m^2\theta = 0$$

La solución a este tipo de ecuación diferencial es de la forma

$$\theta = c_1 e^{mx} + c_2 e^{-mx}$$
$$\theta = A \cosh(mx) + B \sinh(mx)$$

Para evaluar las constantes de integración aplicando condiciones frontera, hay cuatro posibilidades:

Conjunto	Aleta muy larga	Una temperatura conocida en $x=L$	Aislamiento en el extremo	Conducción igual a la convección en el extremo
Condiciones frontera	$\theta = \theta_0$ en $x=0$ $\theta = 0$ en $x \rightarrow \infty$	$\theta = \theta_0$ en $x=0$ $\theta = \theta_L$ en $x=L$	$\theta = \theta_0$ en $x=0$ $d\theta/dx = 0$ en $x=L$	$\theta = \theta_0$ en $x=0$ $kd\theta/dx = h\theta$ en $x=L$
Relación θ/θ_0	e^{-mx}	$\left(\frac{\theta_L}{\theta_0} - e^{-mL}\right) \left(\frac{e^{mx} - e^{-mx}}{e^{mL} - e^{-mL}}\right) + e^{-mx}$	$\frac{\cosh[m(L-x)]}{\cosh mL}$	$\frac{\cosh[m(L-x)] + (h/mk) \sinh[m(L-x)]}{\cosh mL + (h/mk) \sinh mL}$
Flujo de calor $q(x)$	$kAm\theta_0$	$kAm\theta_0 \left[1 - \frac{2(\theta_L - \theta_0 e^{-mL})}{e^{mL} - e^{-mL}}\right]$	$kAm\theta_0 \tanh(mL)$	$kAm\theta_0 \frac{\sinh mL + (h/mk) \cosh mL}{\cosh mL + (h/mk) \sinh mL}$

El cálculo de la transferencia de calor puede hacerse por la ecuación de enfriamiento de Newton $q = \int h\theta dS$ o por la 1a. Ley de Fourier considerando la transferencia en la base $q = -kAd\theta/dx|_{x=0}$.

Superficies rectas con sección transversal uniformemente variable

Si el área de la aleta varía linealmente con x , se puede expresar el cambio de $A(x)$ y $P(x)$ tomando los valores iniciales y finales A_0 , P_0 , A_L , P_L .

$$A = A_0 - (A_0 - A_L) \frac{x}{L}$$

$$P = P_0 - (P_0 - P_L) \frac{x}{L}$$

$$\frac{d}{dx} \left\{ \left[A_0 - (A_0 - A_L) \frac{x}{L} \right] \frac{dT}{dx} \right\} - \frac{h}{k} \left[P_0 - (P_0 - P_L) \frac{x}{L} \right] (T - T_\infty) = 0$$

Superficies curvas con espesor uniforme

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) - \frac{hr}{kt} (T - T_\infty) = 0$$

Debe considerarse el problema con coordenadas cilíndricas y área y perímetro como $A(r)=4\pi r t$ y $P(r)=4\pi r$

La transferencia de calor en una aleta es más efectiva si la temperatura en todo su perímetro es igual a la temperatura de la base, de modo que el flujo de calor para una aleta 100% efectiva se calcula por $q = hS(T_0 - T_\infty)$. Pero la temperatura a lo largo de la aleta es menor a la de la base, haciendo que el flujo de calor transferido al fluido sea menor. Por tanto, se puede establecer una *eficiencia* de la aleta:

$$\eta_{aleta} = \frac{q_{real}}{q_{máximo}}$$

Para una superficie con aletas, la transferencia de calor total está dada por:

$$q_{total} = q_s + q_{aletas}$$

El flujo de calor en la superficie de la pared es de tipo convectivo, mientras que el debido a las aletas puede expresarse también como un flujo de calor convectivo en función de la superficie de la aleta.

Considerando además la efectividad de la aleta mencionada anteriormente, se tiene:

$$q_{total} = hA_0(T_0 - T_\infty) + hA_{aletas}\eta_{aletas}(T_0 - T_\infty)$$

$$q_{total} = h(A_0 + A_{aletas}\eta_{aletas})(T_0 - T_\infty)$$

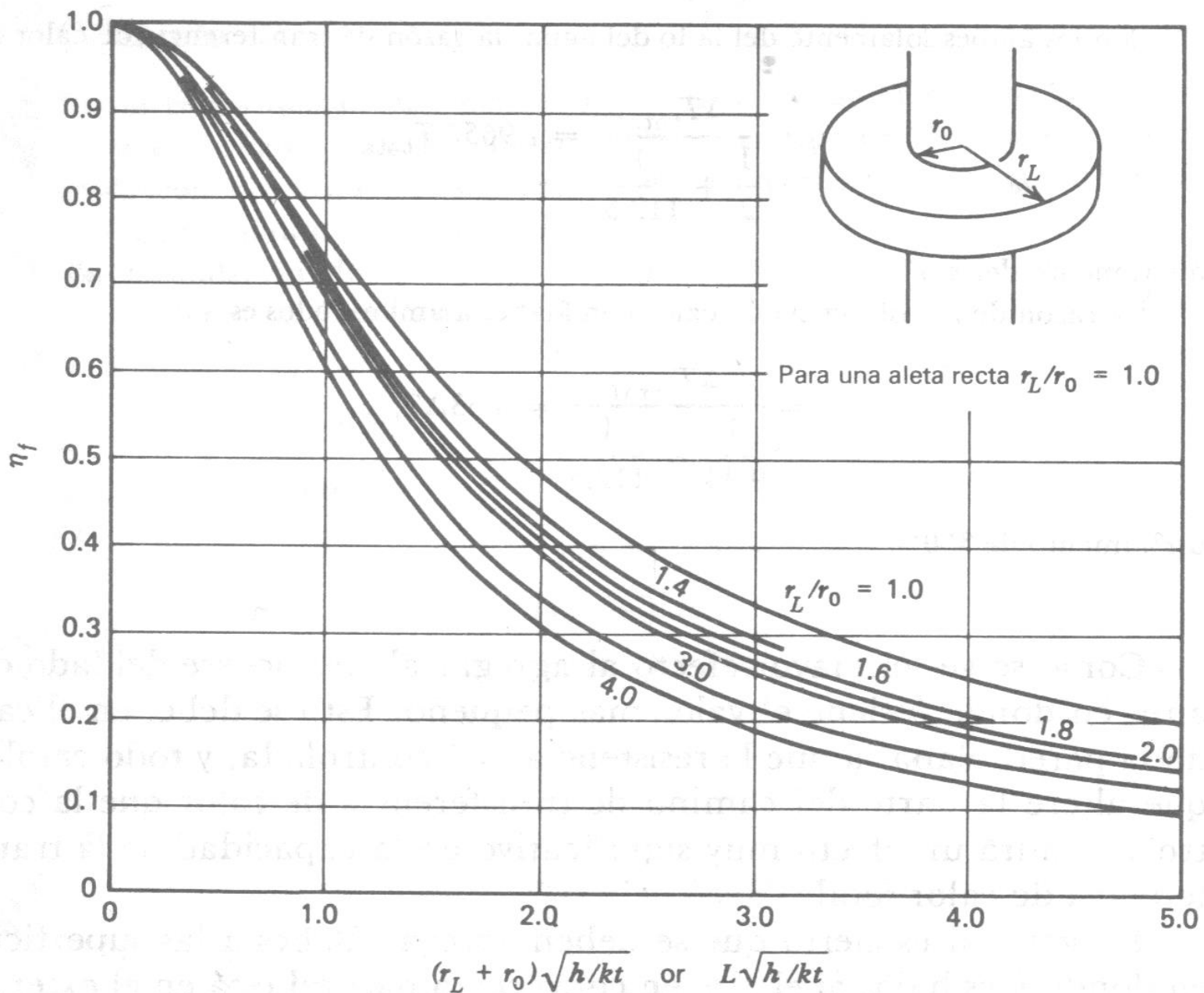


Figura 4.9 Efectividad de una aleta para aletas rectas y circulares de espesor constante.

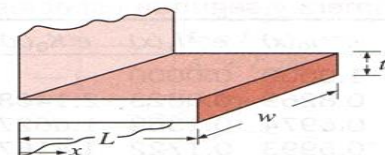
Aletas rectangulares rectas

$$m = \sqrt{2h/kt}$$

$$L_c = L + t/2$$

$$A_{\text{aleta}} = 2wL_c$$

$$\eta_{\text{aleta}} = \frac{\tanh mL_c}{mL_c}$$

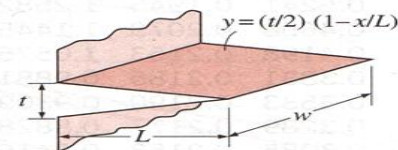


Aletas triangulares rectas

$$m = \sqrt{2h/kt}$$

$$A_{\text{aleta}} = 2w\sqrt{L^2 + (t/2)^2}$$

$$\eta_{\text{aleta}} = \frac{1}{mL} \frac{I_1(2mL)}{I_0(2mL)}$$



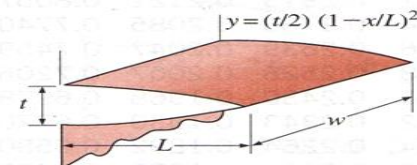
Aletas parabólicas rectas

$$m = \sqrt{2h/kt}$$

$$A_{\text{aleta}} = wL[C_1 + (L/t)\ln(t/L + C_1)]$$

$$C_1 = \sqrt{1 + (t/L)^2}$$

$$\eta_{\text{aleta}} = \frac{2}{1 + \sqrt{(2mL)^2 + 1}}$$



Aletas circulares de perfil rectangular

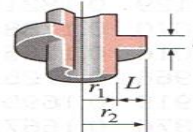
$$m = \sqrt{2h/kt}$$

$$L_c = r_2 + t/2$$

$$A_{\text{aleta}} = 2\pi(r_2^2 - r_1^2)$$

$$\eta_{\text{aleta}} = C_2 \frac{K_1(mr_1)I_1(mr_2) - I_1(mr_1)K_1(mr_2)}{I_0(mr_1)K_1(mr_2) + K_0(mr_1)I_1(mr_2)}$$

$$C_2 = \frac{2r_1/m}{r_2^2 - r_1^2}$$



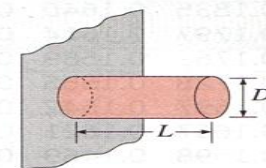
Aletas de espiga de perfil rectangular

$$m = \sqrt{4h/kD}$$

$$L_c = L + D/4$$

$$A_{\text{aleta}} = \pi DL_c$$

$$\eta_{\text{aleta}} = \frac{\tanh mL_c}{mL_c}$$

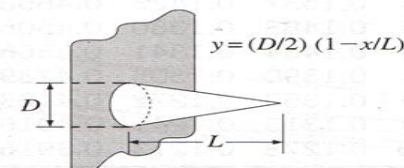


Aletas de espiga de perfil triangular

$$m = \sqrt{4h/kD}$$

$$A_{\text{aleta}} = \frac{\pi D}{2} \sqrt{L^2 + (D/2)^2}$$

$$\eta_{\text{aleta}} = \frac{2}{mL} \frac{I_2(2mL)}{I_1(2mL)}$$



Aletas de espiga de perfil parabólico

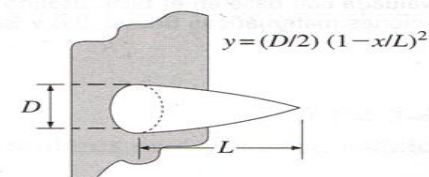
$$m = \sqrt{4h/kD}$$

$$A_{\text{aleta}} = \frac{\pi L^3}{8D} [C_3 C_4 - \frac{L}{2D} \ln(2DC_4/L + C_3)]$$

$$C_3 = 1 + 2(D/L)^2$$

$$C_4 = \sqrt{1 + (D/L)^2}$$

$$\eta_{\text{aleta}} = \frac{2}{1 + \sqrt{(2mL/3)^2 + 1}}$$

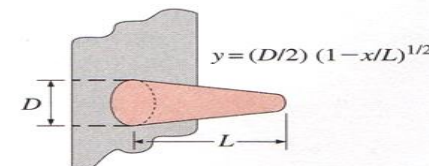


Aletas de espiga de perfil parabólico (punta truncada)

$$m = \sqrt{4h/kD}$$

$$A_{\text{aleta}} = \frac{\pi D^4}{96L^2} \left\{ [16(L/D)^2 + 1]^{3/2} - 1 \right\}$$

$$\eta_{\text{aleta}} = \frac{3}{2mL} \frac{I_1(4mL/3)}{I_0(4mL/3)}$$



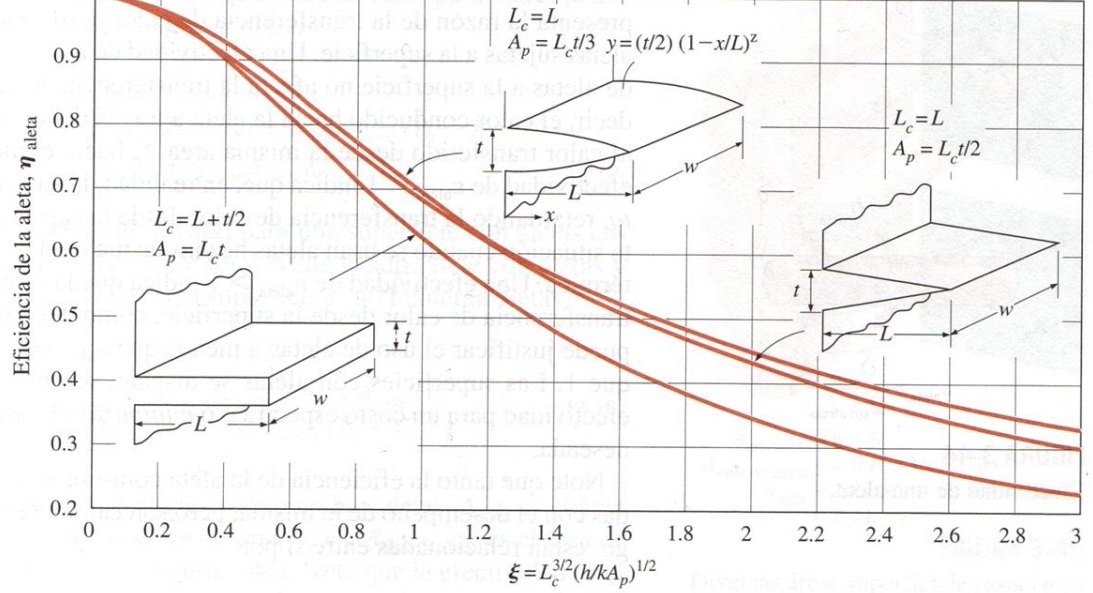


FIGURA 3-42

Eficiencia de aletas rectas de perfiles rectangular, triangular y parabólico.

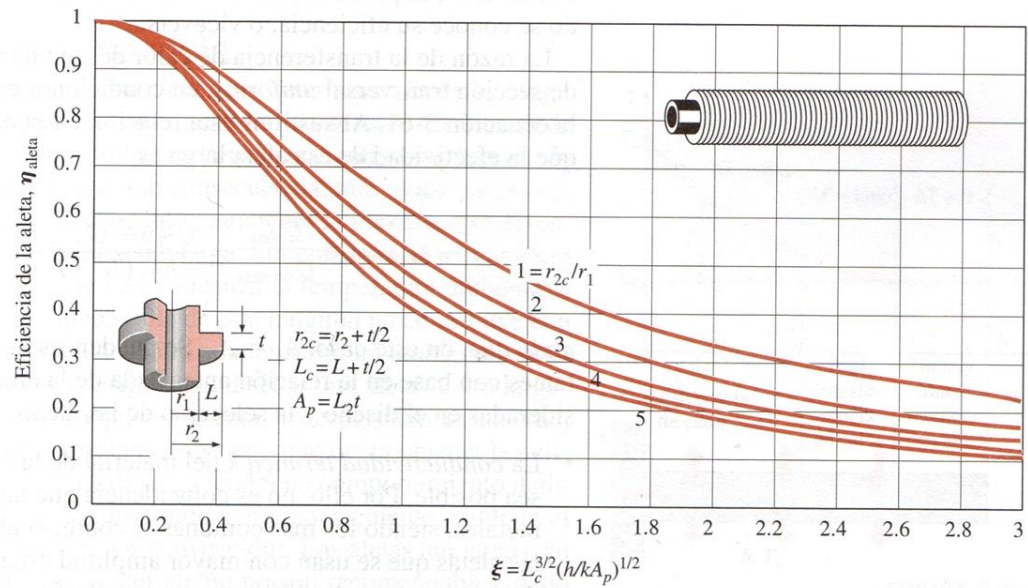


FIGURA 3-43

Eficiencia de aletas circulares de espesor constante t .

Finalmente, la efectividad de una aleta es el desempeño que tiene una aleta a la transferencia de calor, relacionada con el área de su base.

$$\varepsilon = \frac{q_{aleta}}{q_{sinaleta}} = \frac{\eta_{aleta} h A_{aleta} (T_0 - T_\infty)}{h A_b (T_0 - T_\infty)} = \frac{A_{aleta}}{A_b} \eta_{aleta}$$

q_{aleta} representa el flujo de calor que disipa la aleta completa, mientras que $q_{sinaleta}$ es el flujo de calor que pasa por el área de la base de la aleta, sin que ésta esté presente.

Se tiene un transistor protegido del ambiente por una caja que tiene una resistencia térmica de $20^\circ\text{C}/\text{W}$. El transistor tiene una potencia nominal de 10 W y se aconseja por el fabricante que la temperatura de la caja no debe ser mayor a 85°C . Determine la potencia de operación de este transistor si la temperatura del medio en el que se opera está a 25°C .

En un sistema de calefacción, el vapor de agua fluye por tubos cuyo diámetro exterior es $D_1=3$ cm y cuyas paredes se mantienen a una temperatura de 120°C . Se sujetan al tubo aletas circulares de aluminio ($k=180$ W/m $\cdot^\circ\text{C}$) con un diámetro exterior $D_2=6$ cm y espesor constante $t=2$ mm. El espacio entre las aletas es de 3 mm, lo que arroja 200 aletas por cada metro de longitud de tubo. El calor se transfiere al aire circundante que está a $T_\infty=25^\circ\text{C}$, con un coeficiente superficial de TC $h=60$ W/m $^2\cdot^\circ\text{C}$. Determine el incremento en la transferencia de calor del tubo por metro de longitud.

Se separan agua y aire por una pared plana de acero dulce. Se quiere aumentar la razón de transferencia de calor entre los dos agregando a la pared aletas rectangulares rectas de acero dulce de 0.05 in de espesor, 1 in de longitud y espaciados a 0.5 in entre los centros. ¿Cuál es el porcentaje de aumento en la transferencia de calor que se puede lograr agregando aletas a) al lado exterior, b) al lado del agua y c) a ambos lados de la pared plana? Los coeficientes h del aire y del agua son 2 y 45 Btu/hr-ft²-°F.

Una tubería lleva vapor saturado a 300 psi y pasa por un cuarto con aire a temperatura de 80°F. Si los valores de h para la pared interna y externa son 1700 y 7 Btu/hr-ft²-°F respectivamente, ¿cuál sería la pérdida de calor por metro de tubería? La tubería es de 2.5 in de acero suave calibre 80.

Si se aísla la tubería con magnesio de 2 in de espesor al 85%, ¿cuál sería la disminución de flujo de calor comparado con el caso anterior?

Prueba #1

1.- Hay aire encerrado entre las paredes interior y exterior de una casa. Este espacio es de $3\text{-}5/8$ in y es bastante grande como para considerar que la transferencia es unidimensional. Se supone también que la conducción es el modo dominante en la transferencia de calor. La pared exterior e interior están a 122°F y 73°F respectivamente; ¿cuál es el flujo de calor en estado estable? Comparar este flujo de calor con el correspondiente cuando este espacio se ha rellenado con aislante de lana de roca.

2.- Una tubería lleva vapor saturado a 300 psi y pasa por un cuarto con aire a temperatura de 80°F . Si los valores de h para la pared interna y externa son 1700 y 7 Btu/hr-ft²-°F respectivamente, ¿cuál sería la pérdida de calor por metro de tubería? La tubería es de 2.5 in de acero suave calibre 80. Si se aísla la tubería con magnesio de 2 in de espesor al 85%, ¿cuál sería la disminución de flujo de calor comparado con el caso anterior?

3.- Partiendo de la forma cilíndrica de la ecn. de calor, bajo condiciones de estado estable se aplica la ecn. de Laplace y aparece en la forma mostrada abajo. a) ¿A qué forma se reduce esta ecuación si la conducción va solamente en la dirección radial? b) Obtener la variación de temperatura $T(r)$ en el caso de conducción radial con condiciones límite $T(r_i)=T_i$ y $T(r_e)=T_e$. c) Expresar la razón de flujo de calor q_r . d) ¿Cuál es el factor de forma para esta configuración?

El concepto de analogía es útil para relacionar la transferencia de calor con el flujo de corriente. Esto obliga a transformar la 1ª ley de Fourier en una forma apropiada, aunque sigue siendo la misma ecuación.

Se puede hacer una serie de transformaciones adicionales para observar los factores de la ecuación en diferentes maneras:

Puede escribirse la ecuación de Fourier como $q=UA\Delta T$, englobando todos los mecanismos sobre un mismo coeficiente U . U es el coeficiente global de transferencia de calor (Btu/hr·ft²·°F)

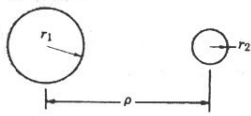
Otra forma es $q=kF\Delta T$, donde F es el factor de forma, ya que involucra los valores de la geometría del sistema analizado.

La forma de relacionar todos estos factores es:

$$kF = UA = \frac{1}{\sum R_t}$$

Tabla 4.3 Factores de forma para la conducción

Configuración	Factor de forma, S $q = kS(T_i - T_o)$
Cilindros circulares concéntricos	$\frac{2\pi L}{\ln(r_o/r_i)}$
Cilindros circulares excéntricos	$\frac{2\pi L}{\cosh^{-1}\left(1 + \frac{\rho^2 - \varepsilon^2}{2\rho}\right)}$ $\rho = r_i/r_o$ $\varepsilon = e/r_o$
Cilindro circular en un cilindro cuadrado	$\frac{2\pi L}{\ln(r_o/r_i) - 0.27079}$
Cilindro circular en un cilindro hexagonal	$\frac{2\pi L}{\ln(r_o/r_i) - 0.10669}$
Cilindro horizontal enterrado de longitud L	$\frac{2\pi L}{\ln(2\rho/r)}$
Disco delgado horizontal enterrado, y espesor de radio $\ll r$	$\frac{2\pi L}{\cosh^{-1}(\rho/r)}$ $\frac{2.22r}{1 - r/2.83\rho}$
Esfera enterrada	$\frac{4\pi r}{1 - r/20}$
Dos cilindros en un medio homogéneo infinito $L \gg r_1, r_2, \rho$	$\frac{2\pi L}{\cosh^{-1}\left(\frac{D^2 - r_1^2 - r_2^2}{2r_1 r_2}\right)}$

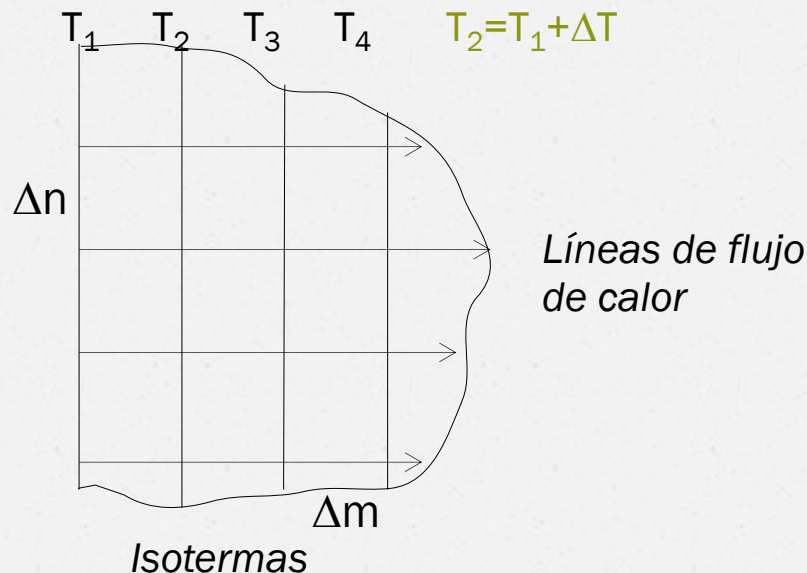


Conducción de calor bidimensional (estado estable)

Aún cuando se trate de estado estable, la transferencia de calor en 2 y 3 dimensiones es de difícil análisis. Las soluciones gráficas son más accesibles. Para resolver la ecuación bidimensional de Laplace

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

se puede usar la graficación de flujo con $T(x,y)=\text{constante}$ para todas las fronteras (fronteras isotérmicas).



A lo largo de las isotermas no hay flujo de calor.

Considerando entonces la rejilla de isotermas de N secciones de flujo de calor total, por cada una de las cuales fluye una cantidad de calor Δq , el flujo de calor total está dado por:

$$q_t = N \Delta q$$

Supongamos que podemos aislar un solo segmento de flujo de calor, el gradiente de temperatura es

$$\frac{\Delta T}{\Delta m} = \frac{(T + \Delta T) - T}{\Delta m}$$

Usando la ecuación de razón de Fourier en el segmento: ($q \propto \Delta n(\Delta T/\Delta m)$)

$$\Delta q = -k\Delta n \frac{\Delta T}{\Delta m}$$

Si hacemos que el sistema de mallas tenga $\Delta m = \Delta n$, la ecuación se vuelve

$$\Delta q = -k\Delta T$$

La diferencia de temperaturas entre isotermas está dada por $\Delta T = (T_c - T_f)/M$ siendo M el número de nodos o isotermas dibujadas:

$$q_t = N\Delta q = Nk\Delta T$$

$$q_t = \frac{N}{M} k(T_c - T_f)$$

Se determina que las superficies interior y exterior de una chimenea rectangular son iguales a 300°F y 100°F respectivamente. ¿Cuánto calor se transfiere a través de la pared de tabique ($k=0.40 \text{ Btu/hr-ft-}^{\circ}\text{F}$) de la chimenea por pie de altura?

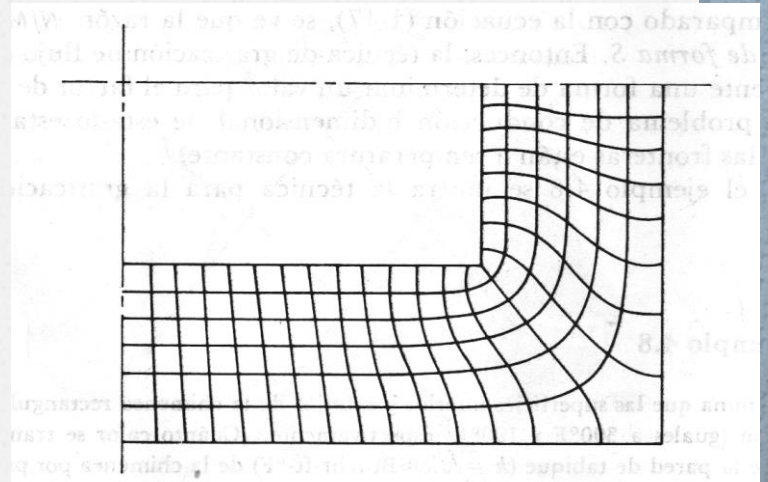
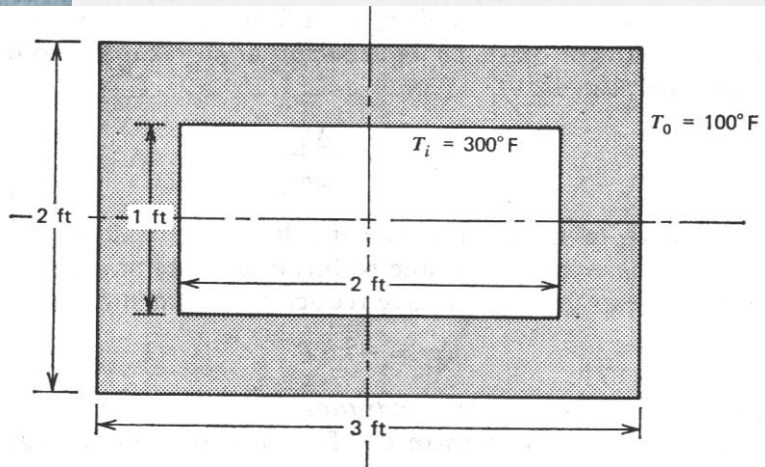


Figura 4.15 Cuadrante amplificado de chimenea para la graficación de flujo

En este ejemplo el número de incrementos de temperatura es $M=6$; el número de canales de flujo de calor es 22 y para el total es $4(22)=88$; el factor de forma por tanto es $F=N/M=88/6=14.7$ y la pérdida de calor para la chimenea es

$$q = k F \Delta T = (0.40 \text{ Btu/hr-ft-}^{\circ}\text{F})(14.7)(200^{\circ}\text{F})$$

$$q = 1147 \text{ Btu/hr - ft de chimenea}$$

Solución numérica a conducción de calor bidimensional

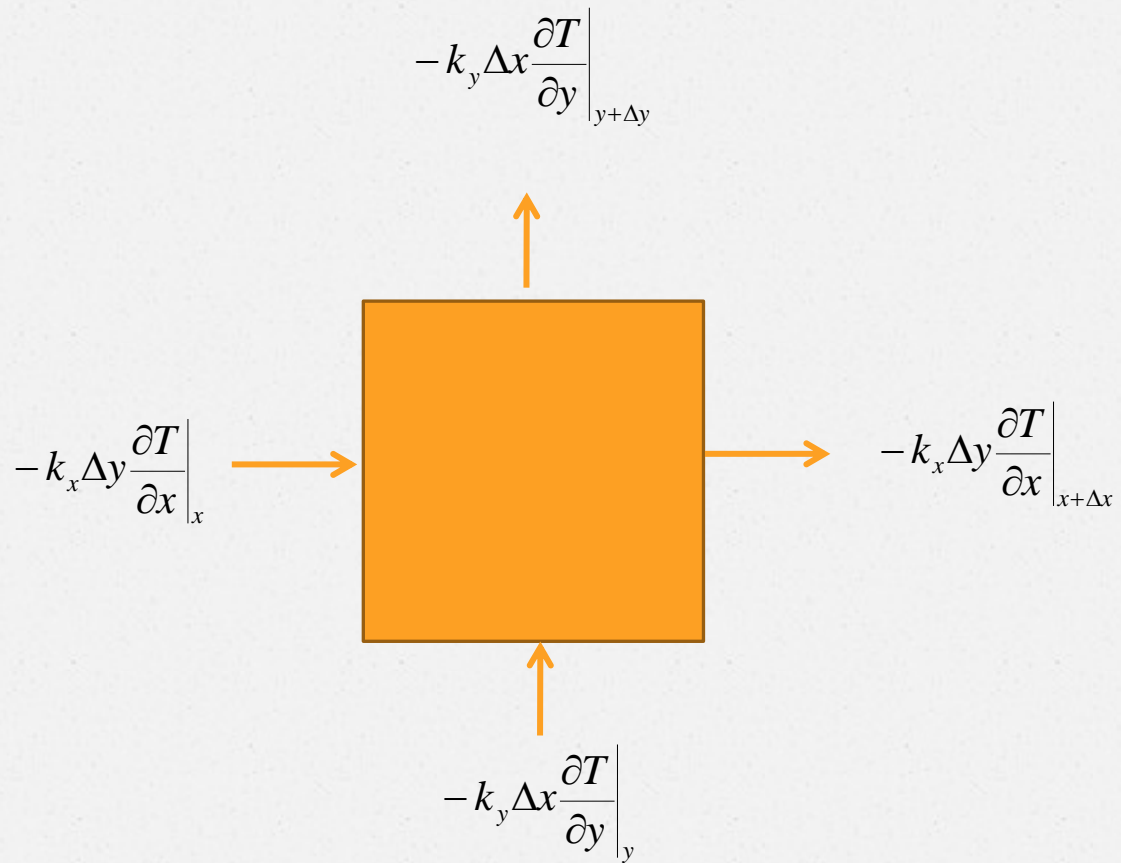
La solución involucra el tratamiento de la ecuación de calor en su forma más compleja, aunque puede aplicarse sobre las ecuaciones simplificadas (Poisson, Laplace).

En este caso, al volumen sobre el que se realizó el balance de material se le llama "nodo i", por lo que el balance de energía da una expresión como la que sigue:

$$\left[\frac{\rho c T|_{t+\Delta t} - \rho c T|_t}{\Delta t} \right] \Delta V = k_x \Delta y \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x+\Delta x} - k_x \Delta y \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_x + k_y \Delta x \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y+\Delta y} - k_y \Delta x \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_y + \dot{q}(x, y, t) \Delta V$$

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \dot{q}$$

$$\nabla^2 T + \frac{\dot{q}}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}$$



Diferencias finitas

El método de diferencias finitas hace uso de la serie truncada de Taylor para obtener ecuaciones de las derivadas de la temperatura. Bajo este enfoque, la temperatura T alrededor de un punto x_i es:

$$T(x_i + h) = T(x_i) + h \left(\frac{dT}{dx} \right)_i + \frac{h^2}{2} \left(\frac{d^2T}{dx^2} \right)_i + \frac{h^3}{6} \left(\frac{d^3T}{dx^3} \right)_i + \dots$$

$$T(x_i - h) = T(x_i) - h \left(\frac{dT}{dx} \right)_i + \frac{h^2}{2} \left(\frac{d^2T}{dx^2} \right)_i - \frac{h^3}{6} \left(\frac{d^3T}{dx^3} \right)_i + \dots$$

Se puede obtener la segunda derivada de la temperatura por medio de una operación de diferencia central de 3 puntos, truncando la serie de Taylor después del término de orden 2 en h y sumando ambas ecuaciones:

$$\left(\frac{d^2T}{dx^2} \right)_i = \frac{T(x_i + h) + T(x_i - h) - 2T(x_i)}{h^2} + O(h^2)$$

$$\left(\frac{d^2T}{dx^2} \right)_i = \frac{T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2)$$

Truncando las series de Taylor y sumando y restando pueden obtenerse ecuaciones para la primera derivada de T, tanto hacia adelante, hacia atrás, como en punto central:

$$\left(\frac{dT}{dx}\right)_i = \frac{T(x_i + h) - T(x_i)}{h} + O(h) = \frac{T_{i+1} - T_i}{\Delta x} + O(\Delta x)$$

$$\left(\frac{dT}{dx}\right)_i = \frac{T(x_i) - T(x_i - h)}{h} + O(h) = \frac{T_i - T_{i-1}}{\Delta x} + O(\Delta x)$$

$$\left(\frac{dT}{dx}\right)_i = \frac{T(x_i + h) - T(x_i - h)}{2h} + O(h^2) = \frac{T_{i+1} - T_{i-1}}{2\Delta x} + O(\Delta x^2)$$

Así pues, para la ecuación de Laplace, estas diferencias se escriben en la forma:

$$\frac{T_{i-1,j} - 2T_{i,j} + T_{i+1,j}}{\Delta x^2} + \frac{T_{i,j-1} - 2T_{i,j} + T_{i,j+1}}{\Delta y^2} = 0$$

$$T_{i,j} = \frac{T_{i-1,j} + T_{i+1,j} + T_{i,j-1} + T_{i,j+1}}{4}$$

Criterios de convergencia

Para estos casos de programación en computadora, se usa uno de dos métodos posibles para detener el proceso:

- 1.- Establecer un límite a la diferencia entre temperaturas T_i sucesivas entre cálculos (T llega a ser constante): $\text{máx } |T_i^{(k)} - T_i^{(k-1)}| < e$
- 2.- Establecer un límite a la diferencia relativa entre cálculos de T_i :
 $\text{máx } |(T_i^{(k)} - T_i^{(k-1)})/T_i^{(k)}| < e$

Una vez que se ha solucionado un problema, se descompone la superficie en un arreglo cuadrado. Se observa que en este tipo de problema, la transferencia de calor ocurre solamente de nodo a nodo y ocurre a lo largo de caminos que comunican a los nodos adyacentes. El calor debe ser suministrado a la superficie con mayor temperatura, por lo tanto, esta cantidad de calor proporcionada a esta frontera debe ser igual al conducido por los nodos adyacentes a esta frontera.

$$q_{total} = k \frac{\Delta y}{\Delta x} \sum_{j=2}^M (T_{1,j} - T_{2,j})$$

por cada unidad de profundidad (dirección de z).

En el caso de que se establezca la rejilla como cuadrada, $\Delta y/\Delta x = 1$, por lo que q es:

$$q_{total} = k \sum_{j=2}^M (T_{1,j} - T_{2,j})$$

Este calor total considera solamente al que se adiciona al lado caliente de una placa o material. Sin embargo, para que las fronteras permanezcan a la temperatura dada, debe extraerse calor al material, por lo que este calor es igual a la suma del calor conducido por todos los nodos adyacentes a la(s) frontera(s) frías. Este calor es:

$$q_t = k \left[\frac{\Delta x}{\Delta y} \sum_{i=2}^N (T_{i,M} - T_{i,M1}) + \frac{\Delta x}{\Delta y} \sum_{i=2}^N (T_{i,2} - T_{i,1}) + \frac{\Delta y}{\Delta x} \sum_{j=2}^M (T_{N,j} - T_{N1,j}) \right]$$

$$q_t = k \left[\sum_{i=2}^N (T_{i,M} - T_{i,M1}) + \sum_{i=2}^N (T_{i,2} - T_{i,1}) + \sum_{j=2}^M (T_{N,j} - T_{N1,j}) \right]$$

Método del balance de calor

Problemas con el método de diferencias finitas:

- Efectos adicionales por diferentes mecanismos
- Variación de propiedades con el espacio
- Generación de calor variable con el tiempo
- Tamaños desiguales de nodos
- Forma de nodo variable
- Cambios de fase

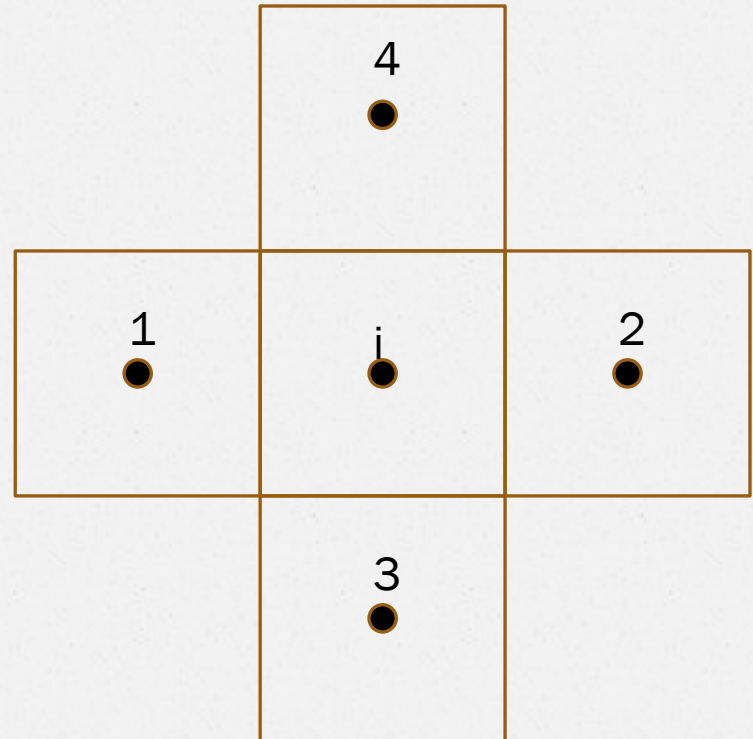
Se realiza un balance de calor sobre cada uno de los elementos y se aplica sobre la ecuación de calor de la 1a ley de la termodinámica. Supóngase un elemento central rodeado de 4 elementos. Esto resulta en:

$$q_{1 \rightarrow i} = \frac{(T_1 - T_i)}{R_{1-i} + R_{i-1}} = K_{1-i}(T_1 - T_i)$$

$$q_{2 \rightarrow i} = \frac{(T_2 - T_i)}{R_{2-i} + R_{i-2}} = K_{2-i}(T_2 - T_i)$$

$$q_{3 \rightarrow i} = \frac{(T_3 - T_i)}{R_{3-i} + R_{i-3}} = K_{3-i}(T_3 - T_i)$$

$$q_{4 \rightarrow i} = \frac{(T_4 - T_i)}{R_{4-i} + R_{i-4}} = K_{4-i}(T_4 - T_i)$$



Si se aplican estas ecuaciones para un balance de calor en las fronteras de un elemento, se obtiene la ecuación:

$$\sum_{j=1}^N K_{ij} T_j - T_i \sum_{j=1}^N K_{ij} + \dot{q}_i V_i = 0$$

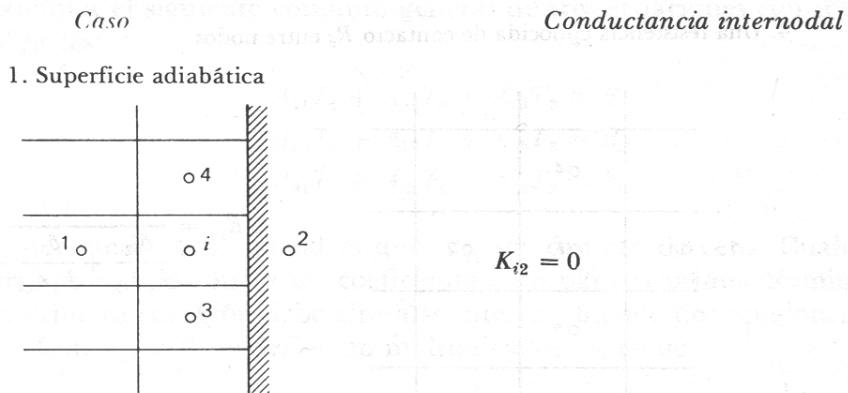
La aplicación de esta ecuación sobre una sucesión de elementos en una dirección resulta en ecuaciones simultáneas del tipo:

$$\frac{T_{i-1} - 2T_i + T_{i+1}}{\Delta x^2} = -\frac{\dot{q}}{k}$$

Con $i=1,2,3,\dots,N-1$. Solamente en los nodos extremos la ecuación cambia dadas ciertas condiciones frontera.

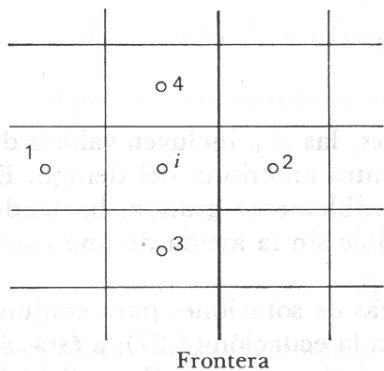
Con un técnica adecuada como la eliminación de Gauss se resuelve el conjunto de ecuaciones algebraicas para las temperaturas de cada nodo.

Tabla 3.1 Conducciones internodales para algunas condiciones importantes de frontera.



2. Convección en una superficie

Sólido \longleftrightarrow Fluido

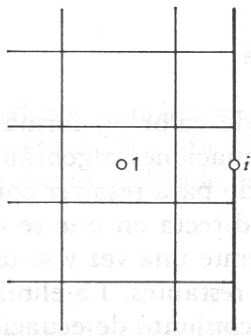


$$K_{i2} = \frac{1}{\frac{\delta_{i2}}{k_i A_{i2}} + \frac{1}{h_i A_{i2}}}$$

- Casos: a) $T_{\text{pared}} = T_{\infty} : h_i \simeq \infty$
 b) $h_i = \text{constante}$
 c) $h_i = h_i(T)$

Ejemplo, ecuación (5-166)

3. Radiación en una superficie



$$K_{is} = A_{is} F_{is} \sigma \frac{T_i^4 - T_s^4}{T_i - T_s}$$

s = medio ambiente a la temperatura T_s
 F_{is} = Factor de forma

Forma final

$$q_2 A_{2i} + kA \frac{T_1 - T_i}{\Delta x} + kA \frac{T_3 - T_i}{\Delta x} + kA \frac{T_4 - T_i}{\Delta x} = - \frac{\dot{q} A \Delta x}{2}$$

Tabla 3.1 (continúa)

Caso **Conductancia internodal**

4. Una resistencia conocida de contacto R_c entre nodos



Superficie internodal

$$K_{i2} = \frac{1}{\frac{\delta_{i2}}{k_i A_{i2}} + \frac{\delta_{2j}}{k_j A_{2j}} + R_c}$$

5. Un flujo específico de calor

$$Q_{2-i} = q_2 A_{2i}$$

donde q_2 es el flujo de calor en la frontera

Simplificando, se trata una malla cuadrada con conducción bidimensional en x y y . Se considera una profundidad unitaria $\Delta z=1$, mientras el espaciamiento entre nodos en x y y es Δx y Δy respectivamente.

Si se supone que las temperaturas entre nodos varían linealmente y las áreas de transferencia son $A_x=\Delta y(1)=\Delta y$ en la dirección x y $A_y=\Delta x(1)=\Delta x$ en la dirección y y se obtiene:

$$k\Delta y \frac{T_{i-1,j} - T_{i,j}}{\Delta x} + k\Delta x \frac{T_{i,j+1} - T_{i,j}}{\Delta y} + k\Delta y \frac{T_{i+1,j} - T_{i,j}}{\Delta x} + k\Delta x \frac{T_{i,j-1} - T_{i,j}}{\Delta y} = -\dot{q}_{i,j} \Delta x \Delta y$$

$$T_{i-1,j} + T_{i+1,j} + T_{i,j+1} + T_{i,j-1} - 4T_{i,j} = -\frac{\dot{q}_{i,j} l^2}{k}$$

Las diferencias finitas se obtienen al sumar las temperaturas de los cuatro vecinos más cercanos al nodo, menos el cuádruplo de la temperatura de ese nodo, más el término de generación de calor. De este modo, la temperatura de cada nodo interior es el promedio aritmético de las temperaturas de los nodos vecinos (cuando no hay generación de calor).

Recomendación de ejercicios en Grupo:

Problema 5-35 Çengel (aletas) X

Problema 5-38 Çengel (aletas) X

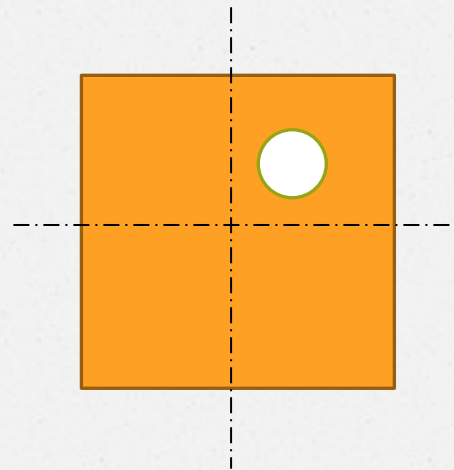
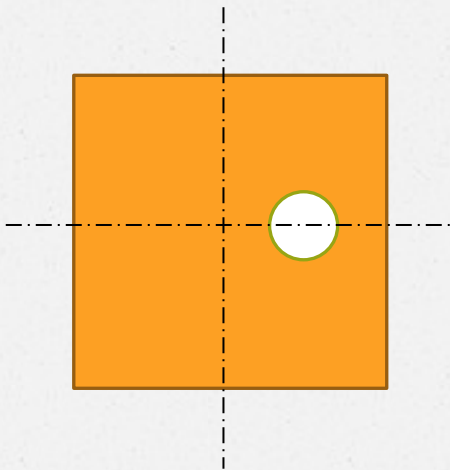
Problema 5-36 Çengel (aletas) X

Problema 5-49 Çengel (bidimensional) X

Problema 5-58 Çengel (bidimensional). Omitir la parte de radiación de la chimenea. X

Un elemento calefactor de varilla de 0.5 in de diámetro está embutido en el centro de un bloque de aluminio de 9 in². La interfase varilla-aluminio está a una temperatura de 600°F y la superficie exterior del aluminio a 250°F. ¿Cuál es la pérdida de calor por pie de este sistema compuesto?

Considerar el mismo problema anterior, sólo que por errores de construcción el calentador en forma de varilla queda fuera del centro del bloque.



Conducción en estado inestable

La ecuación de calor en una dimensión en estado transiente es:

$$\frac{1}{x^n} \frac{\partial}{\partial x} \left(x^n \frac{\partial T}{\partial x} \right) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}$$

$n=0$ para paredes, 1 para cilindros y 2 para esferas.

Suponiendo que el calor se transfiere entre el sistema y el medio ambiente por convección, sin flujo dentro del sistema, sin efectos de trabajo y que es un sistema cerrado, se tiene que la ecuación de calor es:

$$\rho V c \frac{dT}{dt} = -hS(T - T_\infty)$$

Para separar las variables efectivamente debe hacerse un cambio de variable: $\theta(t) = T(t) - T_\infty$

$$\frac{d\theta}{\theta} = -\frac{hS}{\rho V c} dt$$

$$\int_{\theta_i}^{\theta} \frac{d\theta}{\theta} = -\frac{hS}{\rho V c} \int_0^t dt$$

con $\theta(0) = \theta_i$

$$\ln \frac{\theta}{\theta_i} = -\frac{hS}{\rho V c} t$$

Estableciendo una relación de temperaturas (o una temperatura adimensional)

$$\frac{\theta}{\theta_i} = \exp\left(-\frac{hS}{\rho V c} t\right)$$

Se puede introducir la conductividad en el término constante, $\frac{hS}{\rho V c}$, y descomponerlo en dos cantidades adimensionales.

El primer número adimensional es el *módulo de Biot*

$$Bi \equiv \frac{hV/S}{k}$$

Puede interpretarse la cantidad en el numerador como la resistencia por conducción, $(V/S)/k$, mientras que el resto se puede interpretar como la resistencia por convección, $1/h$.

Un valor alto de Bi indica que la resistencia por conducción es dominante, mientras que un valor bajo de Bi indica que domina la resistencia por convección.

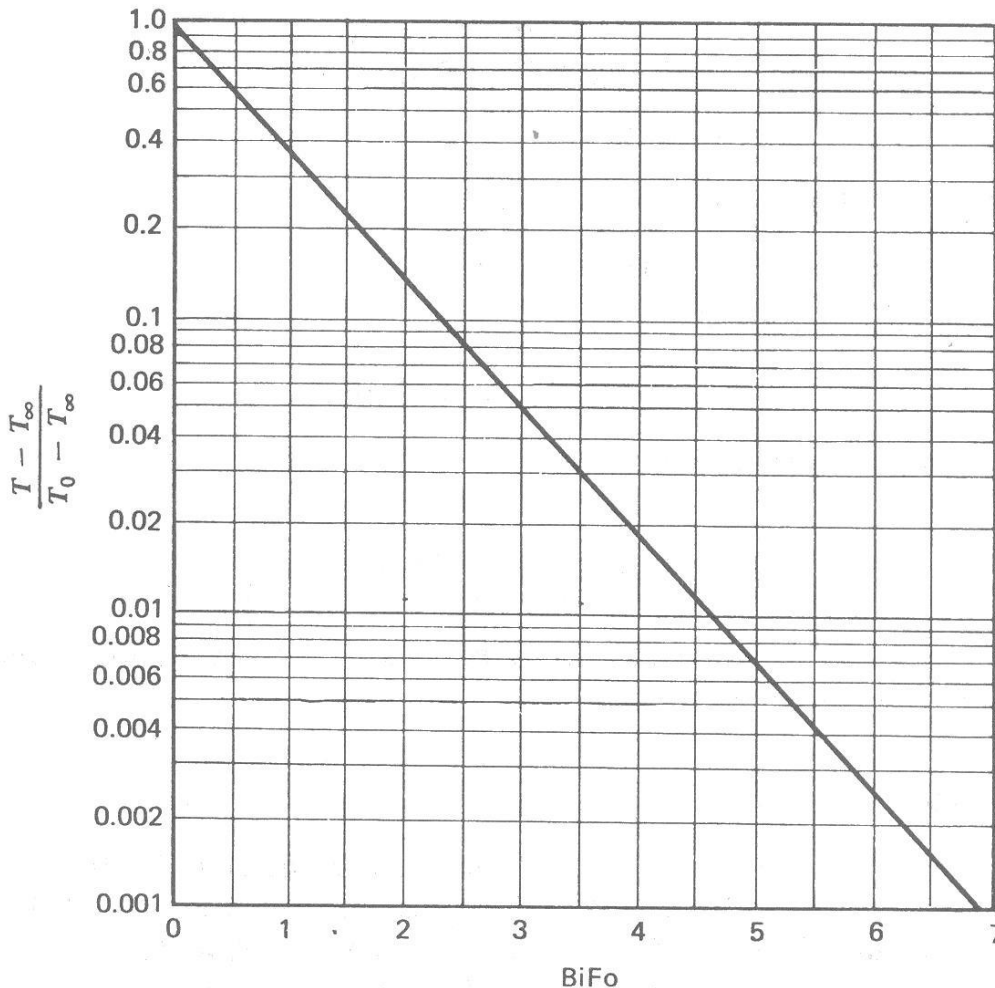
Cuando Bi es menor a 0.1 el problema puede suponerse razonablemente unidimensional en la transferencia de calor.

Por tanto este es el primer paso a realizar en el análisis.

El segundo término se conoce como el *módulo de Fourier*

$$Fo \equiv \frac{\alpha t}{(V/S)^2}$$

Que es una forma de representar el tiempo adimensionalmente.



Una vez que se obtiene $T(t)$ se puede calcular el calor desprendido o absorbido

$$Q = mc_p(T(t) - T_i)$$
$$q(t) = hS(T(t) - T_\infty)$$

Se mide la temperatura de un flujo de gas por medio de termopares cuya unión se puede considerar como esférica de 1 mm de diámetro. Las propiedades de la unión son $k=35 \text{ W/m K}$, densidad $=8500 \text{ kg/m}^3$ y $c_p=320 \text{ J/kg K}$, mientras $h=210 \text{ W/m}^2 \text{ K}$. Determine cuanto tiempo se necesita para que la lectura del termopar sea del 99% de la diferencia inicial de temperaturas.

Un lingote cilíndrico de acero inoxidable de 4 in de diámetro y 1 ft de longitud pasa por un horno de 20 ft de longitud. La temperatura inicial del lingote es de 200°F y debe llegar a 1500°F antes de trabajarlo. El gas del horno está a 2300°F y el coeficiente h combinado es $h=18 \text{ Btu/hr ft}^2 \text{ }^\circ\text{F}$. ¿Cuál debe ser la velocidad máxima de avance del lingote? $k=13 \text{ Btu/hr}\cdot\text{ft}\cdot^\circ\text{F}$, $\alpha=0.17 \text{ ft}^2/\text{hr}$.

La placa de una plancha doméstica tiene un área de 0.5 ft^2 y se fabrica de acero inoxidable con un peso de 3 lb. Si $h=3 \text{ Btu/hr ft}^2 \text{ }^\circ\text{F}$ y la temperatura del aire es de 80°F , ¿cuánto tarda la plancha en llegar a 240°F ? La plancha consume 500 W y al inicio está a la temperatura ambiente.

Soluciones numéricas para la conducción en estado inestable

Para este caso en que sólo hay conducción, con generación de calor y estado inestable, la ecuación a considerar es:

$$\nabla^2 T + \frac{\dot{q}_g}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}$$

Tomando en cuenta la definición de derivada usando métodos numéricos:

$$\frac{T_{i-1,j} - 2T_{i,j} + T_{i+1,j}}{\Delta x^2} + \frac{T_{i-1,j} - 2T_{i,j} + T_{i+1,j}}{\Delta y^2} + \frac{\dot{q}_g}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T_{i,j}}{\partial t}$$

Se ha tomado la definición de derivada en su forma central. Si consideramos que el arreglo de la malla descriptiva del sólido es cuadrado, de manera que $\Delta x = \Delta y$ entonces la ecuación es:

$$T_{i-1,j} - 2T_{i,j} + T_{i+1,j} + T_{i,j-1} - 2T_{i,j} + T_{i,j+1} + \frac{\dot{q}_g}{k} \Delta x^2 = \frac{\Delta x^2}{\alpha} \frac{\partial T_{i,j}}{\partial t}$$

A partir de aquí, se puede expresar la derivada temporal de la temperatura en forma de diferencia hacia adelante, hacia atrás o central. Se recomienda usar esta derivada en forma de diferencia hacia adelante o hacia atrás.

Si usamos la forma de diferencia hacia adelante para la derivada temporal:

$$T_{i-1,j}^n - 2T_{i,j}^n + T_{i+1,j}^n + T_{i,j-1}^n - 2T_{i,j}^n + T_{i,j+1}^n + \frac{\dot{q}_g}{k} \Delta x^2 = \frac{\Delta x^2}{\alpha \Delta t} (T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^n)$$

Esta es la **ecuación de conducción bidimensional transitoria con generación interna de calor**.

En esta ecuación n significa el enésimo paso en el tiempo.

Como la variable $T_{i,j}^{n+1}$ aparece sólo una vez, es fácil despejarla y el método sería de tipo *explícito*:

$$T_i^{n+1} = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} \left(T_{i-1}^n + T_{i+1}^n + \frac{\dot{q}_g}{k} \Delta x^2 \right) + \left(1 - \frac{2\alpha \Delta t}{\Delta x^2} \right) T_i^n$$

Para una sola dimensión.

$$T_{i,j}^{n+1} = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} \left(T_{i-1,j}^n + T_{i+1,j}^n + T_{i,j-1}^n + T_{i,j+1}^n + \frac{\dot{q}_g}{k} \Delta x^2 \right) + \left(1 - \frac{4\alpha \Delta t}{\Delta x^2} \right) T_{i,j}^n$$

Para dos dimensiones.

Para el caso explícito unidimensional, se tiene un criterio de estabilidad para esta clase de sistemas:

$$\frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2}$$

Una pared de tabique ($\alpha=0.018 \text{ ft}^2/\text{hr}$) de 2 ft de espesor inicialmente está a una temperatura uniforme de 70°F . ¿Cuánto tiempo tiene que pasar para que el centro de la pared llegue a 300°F si se eleva la temperatura de ambas superficies simultáneamente a 700 y 300°F y se mantiene en esos niveles?

La ecuación es:

$$T_i^{n+1} = \frac{1}{2}(T_{i-1}^n + T_{i+1}^n)$$

Considerando un criterio de estabilidad de $\alpha \Delta t / \Delta x^2 = 1/2$

Si se escoge inicialmente un $\Delta x = 0.25 \text{ ft}$, se tienen 9 nodos.

Cuando se usa la forma de diferencias hacia atrás, se obtiene una formulación *implícita*. Por tanto, las ecuaciones deben resolverse de manera simultánea.

$$T_{i-1,j}^{n+1} - 2T_{i,j}^{n+1} + T_{i+1,j}^{n+1} + T_{i,j-1}^{n+1} - 2T_{i,j}^{n+1} + T_{i,j+1}^{n+1} + \frac{\dot{q}_g}{k} \Delta x^2 = \frac{\Delta x^2}{\alpha \Delta t} (T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^n)$$

En este caso, para un conjunto de N ecuaciones simultáneas, la forma matricial es:

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1N} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{N1} & A_{N2} & & A_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1^{n+1} \\ T_2^{n+1} \\ \vdots \\ T_N^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_N \end{pmatrix}$$

AT = B

La matriz de coeficientes **A** incluye los valores de las temperaturas determinadas en incrementos anteriores de tiempo.

La eliminación de Gauss proporciona una solución directa a los sistemas de ecuaciones implícitos de transporte transitorio de transferencia de calor. Sin embargo, cuando existen no linealidades en los coeficientes de la matriz A, y con un incremento en el número de incógnitas (sistemas grandes), puede ser mejor usar una técnica de iteración como la de Gauss-Seidel o bien, algún método numérico de predicción inicial o disparo (métodos de colocación).

En la técnica de Gauss-Seidel se siguen varios pasos:

1. Suponga valores aproximados para T_1^0, T_2^0, T_3^0 , etc.
2. Con T_2^0, T_3^0 , etc., resuelva la primera ecuación para T_1^1 .
3. Con T_1^1, T_3^0 , etc., resuelva la segunda ecuación para T_2^1 .
4. Con T_1^1, T_2^1 , etc., resuelva la tercera ecuación para T_3^1 .
5. Siga este procedimiento para todas las T^1 , cuidando que se obtenga un error pequeño.
6. Repita para el siguiente segmento temporal.

PROBLEMA

Se tiene una placa plana de magnesio de 1 ft de espesor y las otras dimensiones son suficientemente grandes como para considerar despreciables los otros efectos. La placa se encuentra inicialmente a la temperatura de 100°F. De repente se baja la temperatura de la superficie del magnesio y se mantiene a 0°F. Se puede considerar que la superficie inferior de la placa está aislada. Describir la distribución de temperatura en la placa con el tiempo para un período de 12 minutos después que se reduce la temperatura superficial.

La ecuación en forma de diferencias finitas que aplica para este problema es

$$T_i^{n+1} = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} (T_{i-1}^n + T_{i+1}^n) + \left(1 - \frac{2\alpha \Delta t}{\Delta x^2} \right) T_i^n$$

Las propiedades del magnesio son $k=99.5$ Btu/(hr·ft·°F), $\rho=109$ lb/ft³, $c_p=0.232$ Btu/(lb·°F). Úsense 5 nodos internos para el sistema, con incrementos de tiempo de 0.005 hr.

Cuando el mismo problema se soluciona con la formulación implícita, la ecuación a utilizar es:

$$T_i^{n+1} = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} (T_{i-1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i+1}^{n+1}) + T_i^n$$

Este tipo de ecuación puede expresarse de una forma genérica como

$$T_i^{n+1} = D_i + \frac{A}{B} (T_{i-1}^{n+1} + T_{i+1}^{n+1})$$

En donde las constantes son

$$A = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2}$$
$$B = \left(1 + \frac{2\alpha \Delta t}{\Delta x^2} \right) = 1 + 2A$$
$$C = \frac{T_i^n}{B}$$

PROBLEMA

Se tiene una barra larga de sección transversal a la temperatura uniforme inicial de 50°F. Determinar la distribución de temperatura en función del tiempo para la barra después de que se eleva y mantiene la temperatura de un extremo hasta 200°F y se bajan y mantienen las temperaturas de los tres lados restantes a 0°F.

La ecuación aplicable en este caso es la de tipo bidimensional.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k}{\rho c_p} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)$$

$$\frac{k\Delta t}{\rho c_p \Delta x^2} (T_{i-1,j}^{n+1} - 2T_{i,j}^{n+1} + T_{i+1,j}^{n+1} + T_{i,j-1}^{n+1} - 2T_{i,j}^{n+1} + T_{i,j+1}^{n+1}) = (T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^n)$$

Que al despejar $T_{i,j}^{n+1}$ produce

$$T_{i,j}^{n+1} = D_{i,j} + E(T_{i-1,j}^{n+1} + T_{i+1,j}^{n+1} + T_{i,j-1}^{n+1} + T_{i,j+1}^{n+1})$$

$$A = \frac{k\Delta t}{\rho c_p \Delta x^2}$$

$$D_{i,j} = \frac{T_{i,j}}{1 + 4A}$$

$$E = \frac{A}{1 + 4A}$$