

FLUJO EN DUCTOS

Dr. Jorge Ibarra Rodríguez

Se ha demostrado que las características de flujo de fluidos son similares bajo ciertas condiciones; es decir, la solución de un problema se aplica para otras situaciones, independientemente de la naturaleza del fluido.

El grupo adimensional que garantiza esto es el número de Reynolds

$$Re = \frac{\rho u l}{\mu}$$

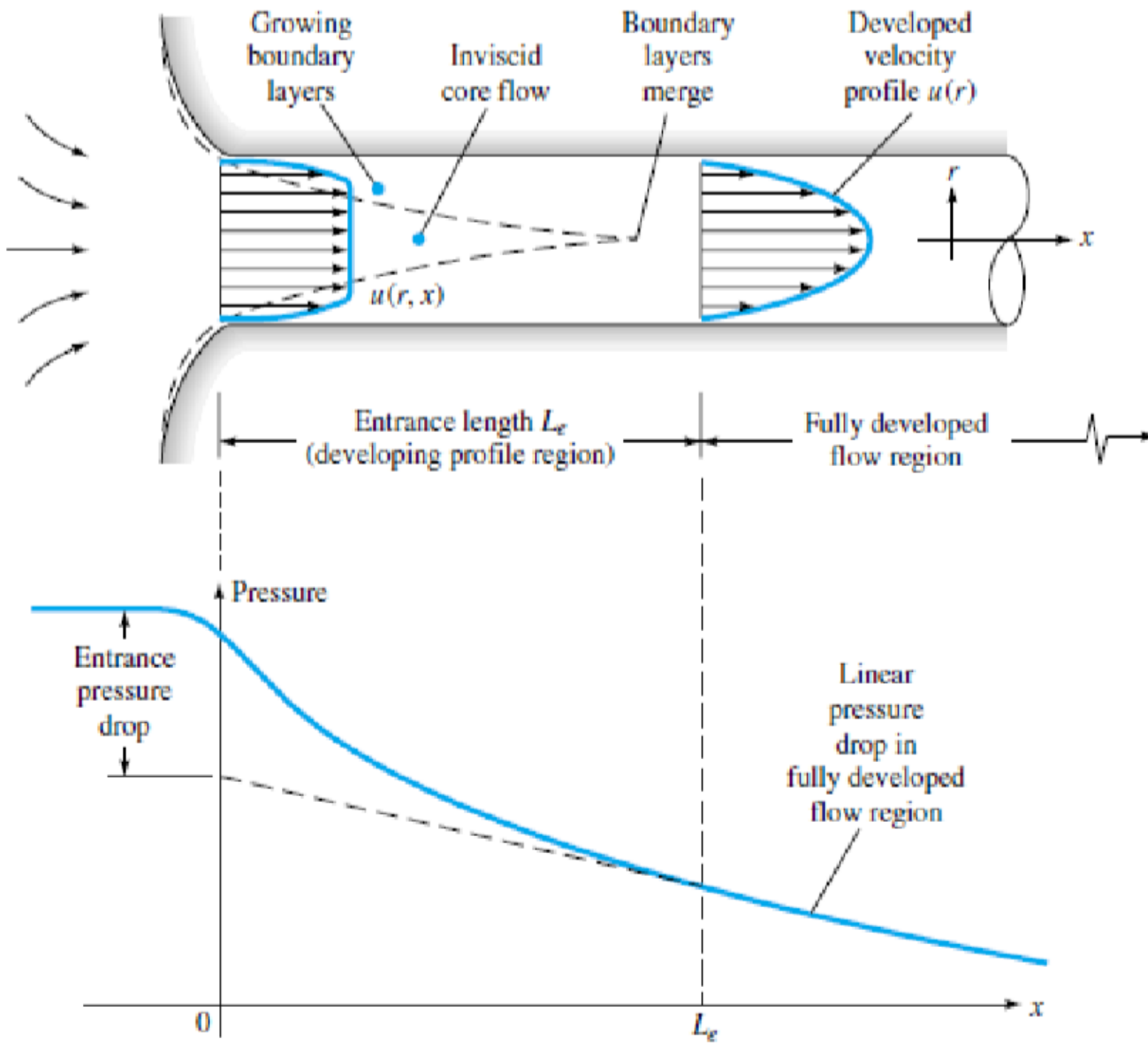
Para un tubo específicamente, la longitud característica es el diámetro y

$$Re = \frac{\rho V D}{\mu}$$

Se ha observado que la transición de turbulento a laminar ocurre alrededor de **Re=2000**

En el flujo laminar, las pérdidas son proporcionales a la velocidad. En flujo turbulento, son proporcionales a la **velocidad elevada a 1.7-2.0**.

El número de Reynolds indica una relación de fuerzas inerciales con respecto a las fuerzas viscosas.



Los esfuerzos cortantes y la fricción son significativos cerca de la frontera sólida.

Cuando el perfil no está desarrollado, las pérdidas varían por unidad de longitud.

Cuando el flujo está bien establecido, las pérdidas son constantes por cada unidad de longitud.

En flujo laminar, la región de entrada se ha encontrado que es

$$\frac{L_e}{D} = 0.058Re$$

En flujo turbulento es mucho menor.

$$\frac{L_e}{D} \approx 4.4Re^{1/6}$$

EJEMPLO

A 12-in-diameter water pipe is 60 ft long and delivers water at 5 gal/min at 20°C. **What fraction of this pipe is taken up by the entrance region?**

Fluye agua a 50°F a través de un tubo de diámetro $D=0.73$ in hacia un vaso. Determine a) el tiempo mínimo necesario para llenar el vaso de 12 onzas ($V=0.0125$ ft³) con agua si el flujo es laminar; repita los cálculos si la temperatura del agua es de 140°F ; b) el tiempo máximo necesario para llenar el vaso si el flujo fuese turbulento; repita los cálculos para una temperatura del agua de 140°F .

Las reglas fundamentales para el análisis de fluidos son:

- Conservación de la masa

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \qquad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

- Conservación del momento lineal

$$\delta F_x = \delta m a_x \qquad \rho g_x + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right)$$

$$\delta F_y = \delta m a_y \qquad \rho g_y + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right)$$

$$\delta F_z = \delta m a_z \qquad \rho g_z + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = \rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right)$$

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2$$

Para incluir efectos viscosos, se establece la relación entre esfuerzos y velocidades

$$\sigma_{xx} = -p + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\sigma_{yy} = -p + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\sigma_{zz} = -p + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right)$$

$$\rho g - \nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} = \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt}$$

FLUJO LAMINAR ESTABLE ENTRE 2 PLACAS PARALELAS

El uso de la ecuación de Navier-Stokes en 3 direcciones arroja:

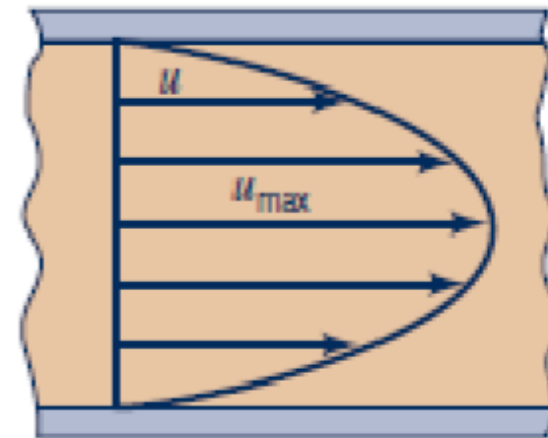
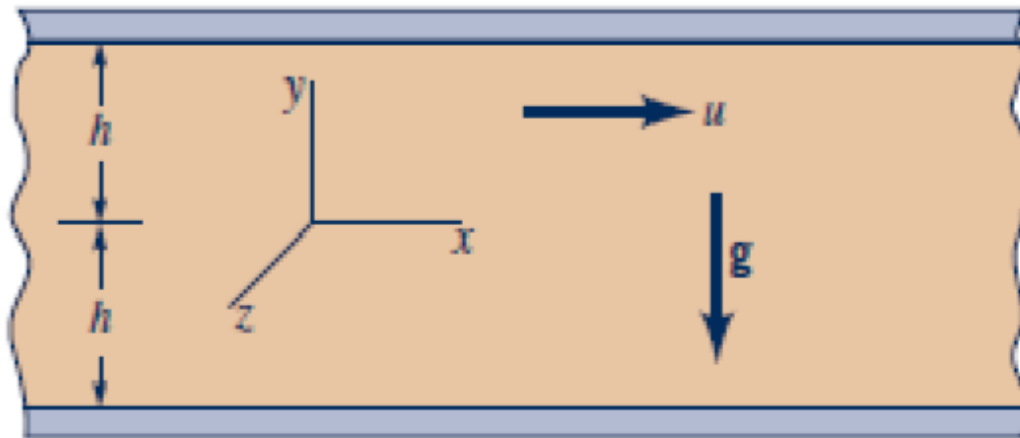
$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial y} - \rho g$$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial z}$$

Las últimas dos ecuaciones pueden integrarse fácilmente para dar

$$p = -\rho g y + f_1(x)$$



Para la primera ecuación, que se puede reescribir

$$\frac{d^2u}{dy^2} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x}$$

Se obtiene

$$\frac{du}{dy} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) y + c_1$$
$$u = \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) y^2 + c_1 y + c_2$$

Si las placas están fijas, entonces $u=0$ en $y=\pm h$ y $c_1=0$

$$c_2 = -\frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) h^2$$

$$u = \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) (y^2 - h^2)$$

Integrando la velocidad entre el área entre las placas se obtiene el **gasto volumétrico** ($G = \int_A u dA$)

$$G = -\frac{2}{3} \frac{h^3}{3\mu} \left(\frac{dp}{dx} \right) = \frac{2}{3} \frac{h^3 \Delta p}{3\mu l} \quad \frac{\Delta p}{l} = -\frac{\partial p}{\partial x}$$

La **velocidad** es G/A es

$$V = \frac{h^2 \Delta p}{3\mu l}$$

La **velocidad máxima** ocurre a mitad de la distancia entre las placas

$$u_{max} = -\frac{h^2}{2\mu} \left(\frac{dp}{dx} \right) = \frac{3}{2} V$$

Este resultado es válido solamente para flujo laminar,

$$Re = \rho * V * 2h / \mu = 1400.$$

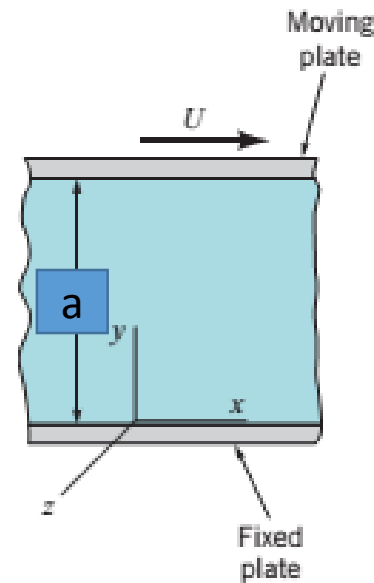
SOLUCIÓN GENERAL PARA 2 PLACAS (FLUJO COUETTE)

Si se considera una placa en movimiento con velocidad U sobre un fluido en un plano inclinado, las ecuaciones de Navier-Stokes se resuelven en:

$$u = \frac{Uy}{a} - \frac{1}{2\mu} \frac{\partial}{\partial x} (p + \rho gh)(ay - y^2)$$

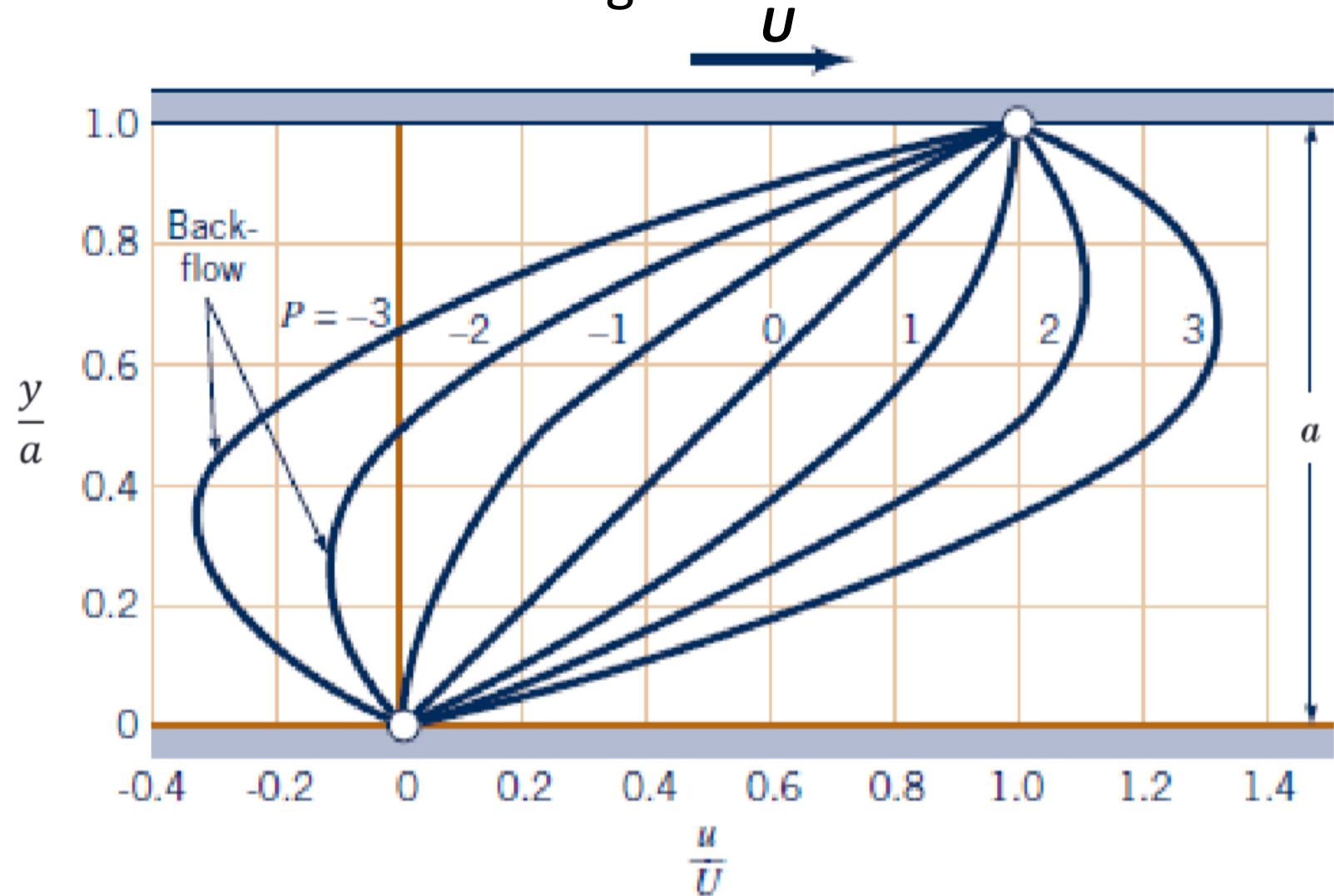
La descarga G se obtiene integrando la ecuación con respecto a y

$$\hat{G} = \int_0^a u dy = \frac{Ua}{2} - \frac{1}{12\mu} \frac{d}{dx} (p + \rho gh)a^3$$



La solución al flujo de Couette se observa en la figura.

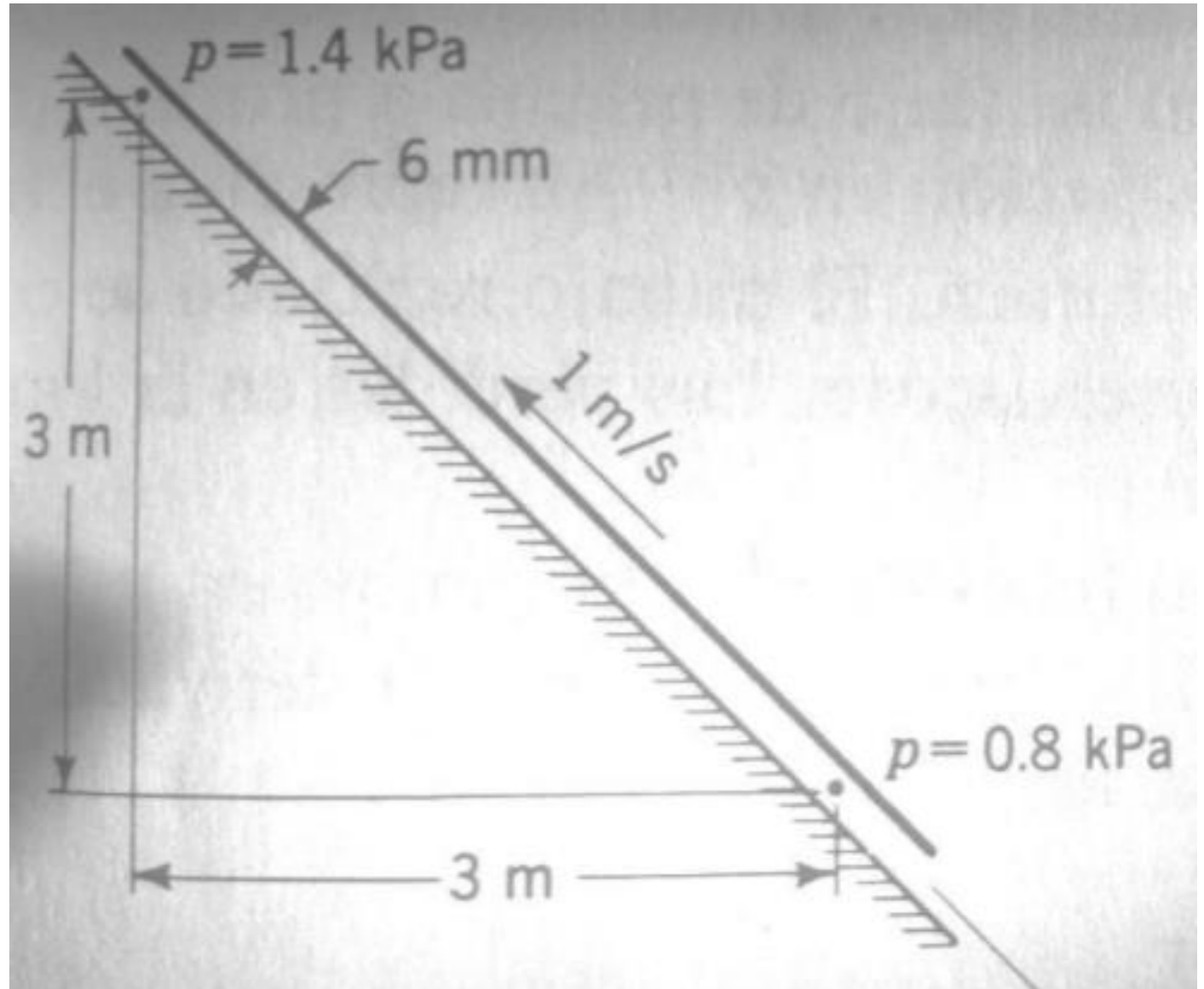
$$P = -\frac{a^2}{2\mu U} \left(\frac{d(p + \rho gh)}{dx} \right)$$



EJEMPLO

En la figura, se mueve una placa respecto a otra, con $\mu=0.8$ P, $\rho=850$ kg/m³.

Determinése la distribución de velocidades, la descarga y el esfuerzo cortante ejercido sobre la placa superior.



EJEMPLO

Una placa ancha pasa a través de un contenedor con un líquido viscoso. La placa se mueve verticalmente hacia arriba con velocidad constante V_0 . Debido a las fuerzas viscosas, la placa arrastra una película de líquido de **espesor h** . La gravedad tiende a escurrir el fluido hacia abajo. Asuma que el flujo es laminar, estable y completamente desarrollado. **Establezca una expresión para la velocidad promedio de la película de líquido al ser arrastrada por la placa.**

Pérdidas en el flujo laminar

El trabajo de flujo realizado es $p + \rho gh$

Como la disminución en el trabajo de flujo es debido a la fricción desarrollada en el fluido, se cumple la relación

$$\frac{d(p + \rho gh)}{dx} = \frac{d\tau}{dy}$$

Las pérdidas en una longitud L son

$$G \frac{d(p + \rho gh)}{dx} L = G(\Delta p + \rho gh)$$

Estas pérdidas son mayores con una mayor du/dy

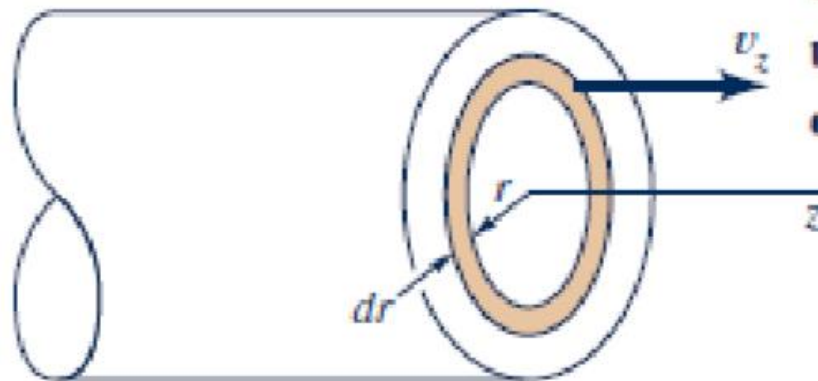
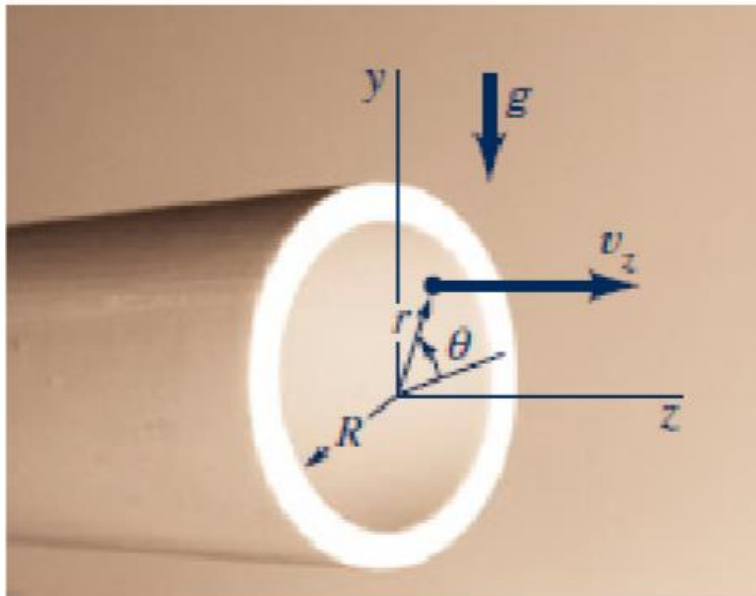
Flujo laminar estable en ductos circulares

Tómese el flujo a través de un tubo de radio R . Para el análisis es más cómodo usar coordenadas cilíndricas.

Las condiciones son $v_r=0$ $v_\theta=0$ $dv_z/dz=0$

En este caso, la velocidad v_z es sólo función de la posición r en el tubo:

$$v_z=v_z(r)$$



■ **Figure 6.34** The viscous flow in a horizontal, circular tube: (a) coordinate system and notation used in analysis; (b) flow through differential annular ring.

Las ecuaciones de Navier-Stokes para este caso

$$\begin{aligned}0 &= -\rho g \operatorname{sen}\theta - \frac{\partial p}{\partial r} \\0 &= -\rho g \operatorname{cos}\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \\0 &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \right]\end{aligned}$$

Las dos primeras ecuaciones se integran y se combinan para dar

$$p = -\rho g(r \operatorname{sen}\theta) + f_1(z) = \rho g y + f_1(z)$$

La última ecuación puede ser escrita como

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z}$$

Si se integra, se obtiene

$$r \frac{\partial v_z}{\partial r} = \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right) r^2 + c_1$$
$$v_z = \frac{1}{4\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right) r^2 + c_1 \ln r + c_2$$

Con la aplicación de condiciones de frontera ($r=0$, $v_z=v_{z\max}$; $r=R$, $v_z=0$) se obtiene

$$c_1 = 0; \quad c_2 = -\frac{1}{4\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right) R^2$$
$$v_z = \frac{1}{4\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right) (r^2 - R^2)$$

El flujo en este caso sería

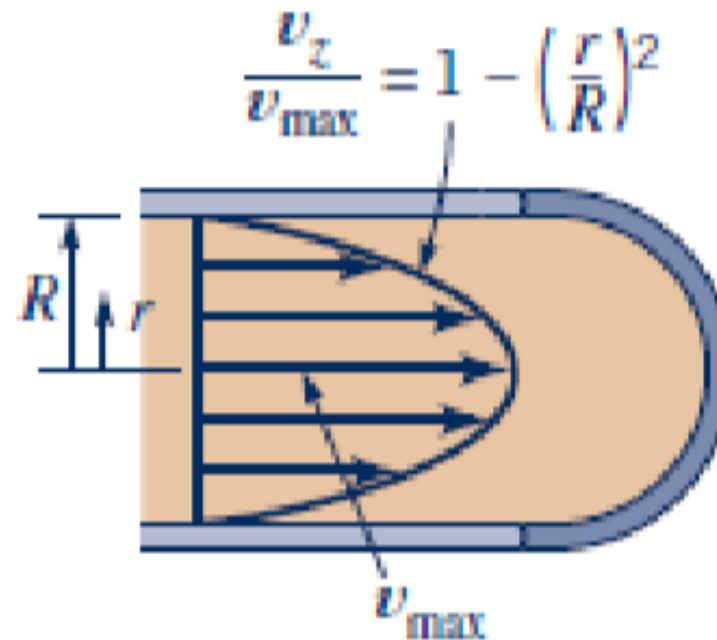
$$G = 2\pi \int_0^R v_z r dr = -\frac{\pi R^4}{8\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right) = \frac{\pi R^4 \Delta p}{8\mu l}$$

Esta ecuación es conocida como la ley de Poiseuille

La velocidad media de la corriente es

$$V = \frac{R^2 \Delta p}{8\mu l}$$

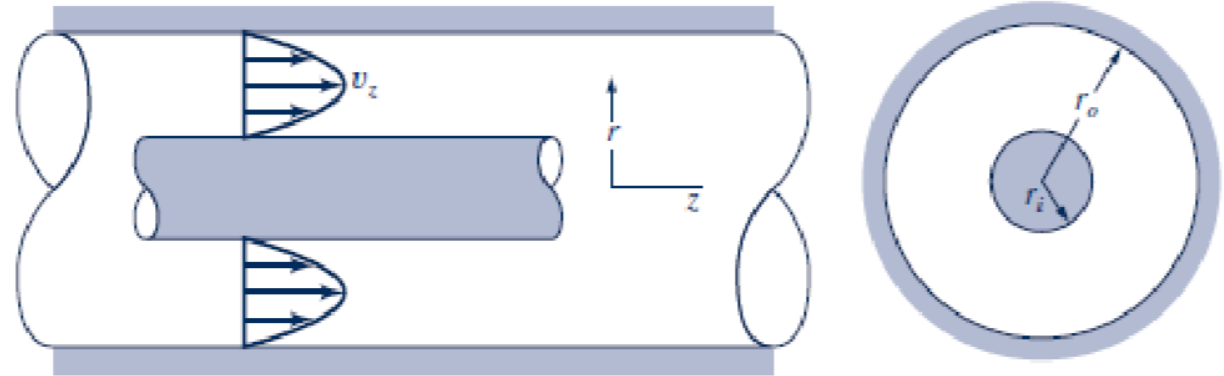
$$\Delta p = \frac{128\mu Q}{\pi D^4}$$



Flujo laminar estable en ductos con otras formas

Las ecuaciones anteriores aplican para esta configuración

$$v_z = \frac{1}{4\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right) \left(r^2 - r_o^2 + \frac{r_i^2 - r_o^2}{\ln(r_o/r_i)} \ln \frac{r}{r_o} \right)$$



$$G = \frac{\pi \Delta p}{8\mu l} \left[r_o^4 - r_i^4 - \frac{(r_o^2 - r_i^2)^2}{\ln r_o/r_i} \right]$$

La velocidad máxima ocurre cuando $dv_z/dr=0$

$$r_m = \left[\frac{r_o^2 - r_i^2}{2 \ln(r_o/r_i)} \right]^{1/2}$$

Para calcular el Reynolds se usa otra longitud característica

$$D_h = \frac{4(\text{Área transversal})}{\text{Perímetro mojado}}$$

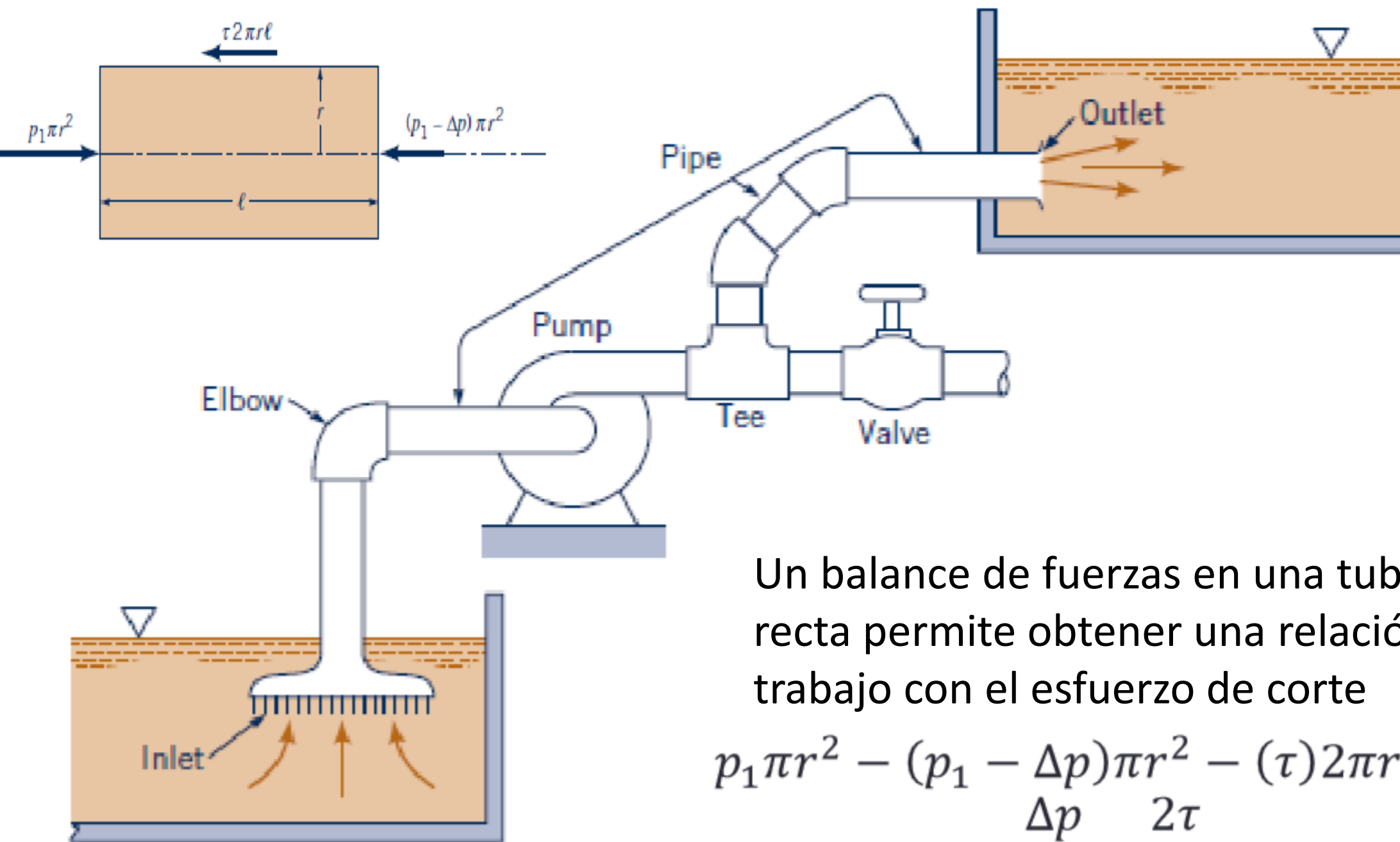
EJEMPLO

A viscous liquid ($\rho=1180 \text{ kg/m}_3$, $\mu=0.0045 \text{ N}\cdot\text{s/m}^2$) flows at a **rate of 12 ml/s** through a horizontal, **4-mm-diameter tube**.

(a) Determine the pressure drop along a **1-m length** of the tube which is far from the tube entrance so that the only component of velocity is parallel to the tube axis

(b) **If a 2-mm-diameter rod is placed in the 4mm-diameter tube** to form a symmetric annulus, what is the pressure drop along a **1-m length** if the flowrate remains the same as in part (a)?

Hacerlo para diferentes radios



Un balance de fuerzas en una tubería recta permite obtener una relación del trabajo con el esfuerzo de corte

$$p_1 \pi r^2 - (p_1 - \Delta p) \pi r^2 - (\tau) 2 \pi r l = 0$$

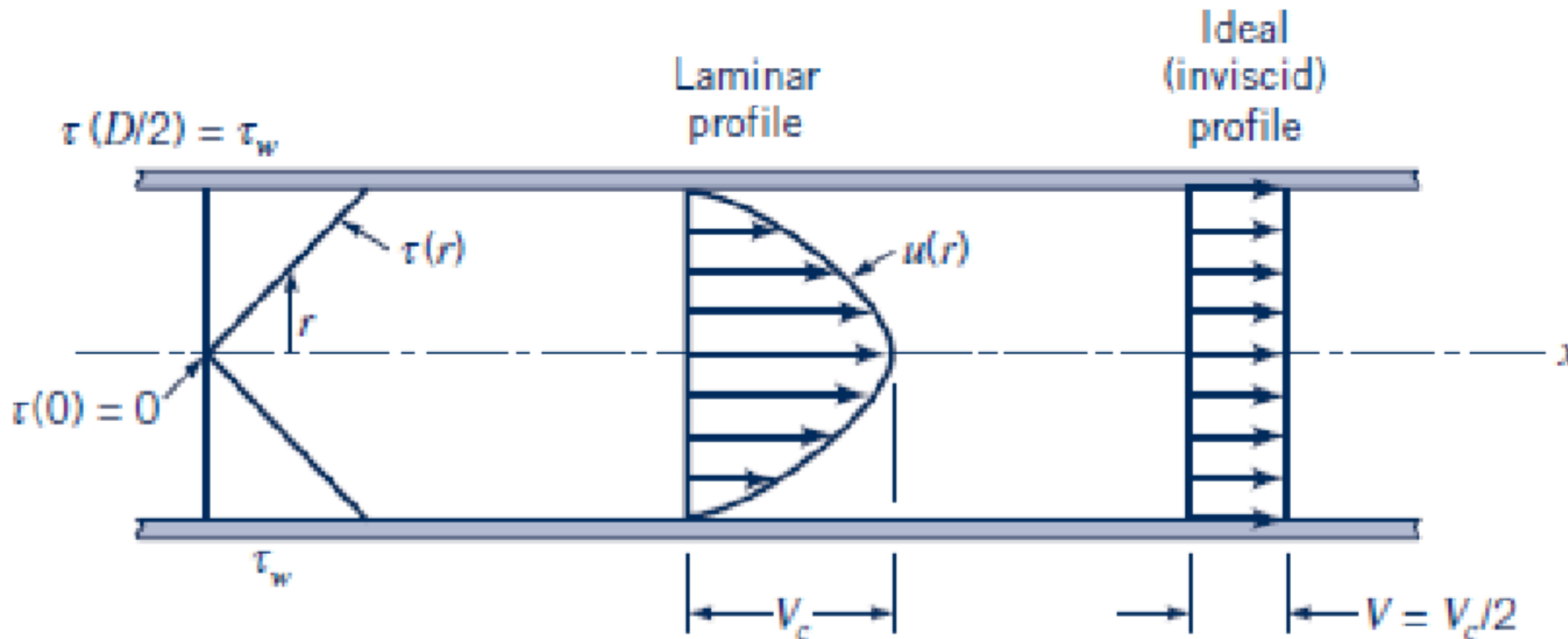
$$\frac{\Delta p}{l} = \frac{2\tau}{r}$$

Se observa que el término $2\tau/r$ es constante, es decir, $\tau = C \cdot r$.
 El esfuerzo de corte es máximo junto a la pared ($r=D/2$), y es igual a cero en $r=0$, de modo que

$$\tau = \frac{2\tau_w r}{D}$$

$$\Delta p = \frac{4l\tau_w}{D}$$

Válidas para flujo laminar y turbulento



$$\tau = -\mu \frac{du}{dr}$$

La aplicación de las ecuaciones anteriores a las tuberías para obtener la velocidad, produce

$$u(r) = \left(\frac{\Delta p D^2}{16\mu l} \right) \left[1 - \left(\frac{2r}{D} \right)^2 \right] = V_c \left[1 - \left(\frac{2r}{D} \right)^2 \right]$$

V_c es la velocidad sobre la línea central

$$u(r) = \frac{\tau_w D}{4\mu} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right]$$

La velocidad y flujo volumétrico son

$$G = \frac{\pi D^4 \Delta p}{128 \mu l}$$

$$V = \frac{D^2 \Delta p}{32 \mu l}$$

$$h_L = \frac{32 \mu L v}{\gamma D^2}$$

Válidas sólo para
flujo laminar

Características del flujo laminar en un tubo:

- El flujo es directamente proporcional a la caída de presión
- Es inversamente proporcional a la viscosidad
- Es inversamente proporcional a la longitud de la tubería
- Es directamente proporcional al diámetro del tubo a la cuarta potencia

GIVEN An oil with a viscosity of $\mu = 0.40 \text{ N} \cdot \text{s}/\text{m}^2$ and density $\rho = 900 \text{ kg}/\text{m}^3$ flows in a pipe of diameter $D = 0.020 \text{ m}$.

FIND (a) What pressure drop, $p_1 - p_2$, is needed to produce a flowrate of $Q = 2.0 \times 10^{-5} \text{ m}^3/\text{s}$ if the pipe is horizontal with $x_1 = 0$ and $x_2 = 10 \text{ m}$?

Despejando la caída de presión y dividiendo por la presión dinámica ($\rho v^2/2$)

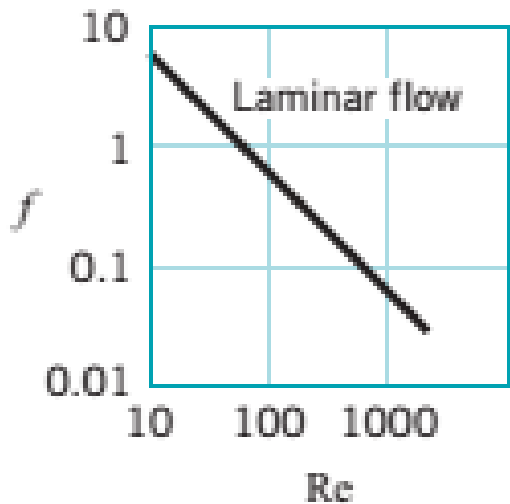
$$\frac{\Delta p}{\frac{1}{2}\rho V^2} = \frac{64}{Re} \left(\frac{l}{D} \right)$$

O bien

$$\Delta p = f \frac{l}{D} \frac{\rho V^2}{2}$$

f es el factor de fricción de Darcy

$$f = \frac{\Delta p \left(\frac{D}{l} \right)}{\frac{\rho V^2}{2}}$$



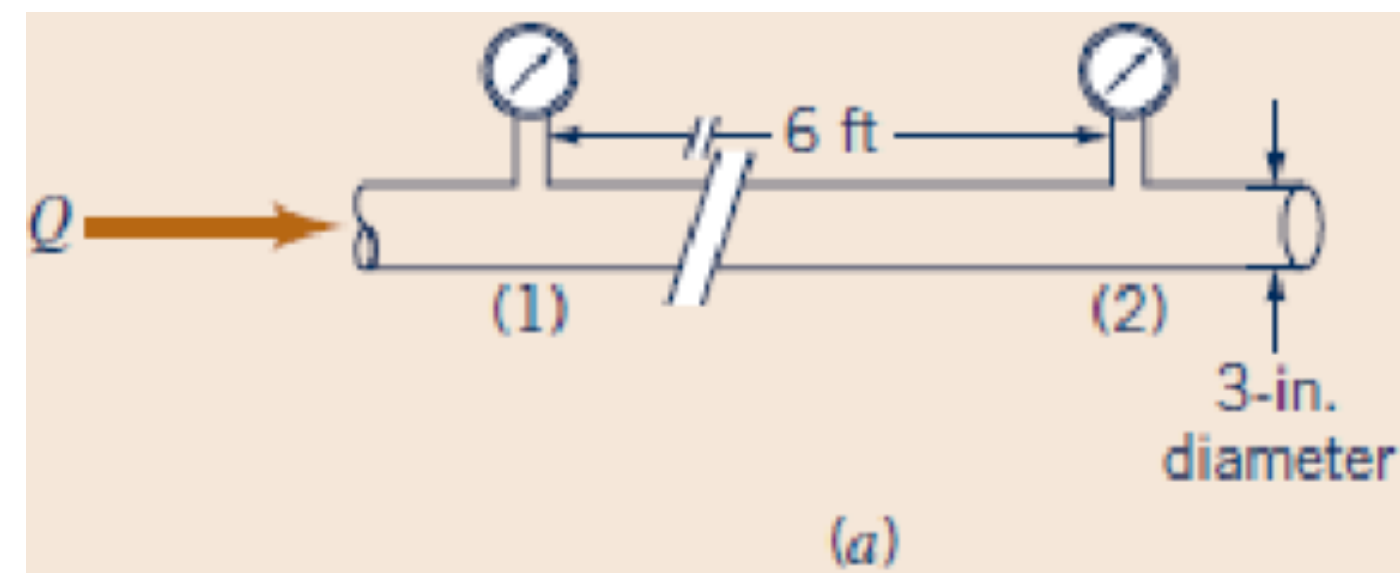
Y por tanto el factor de fricción de Darcy en flujo laminar es

$$f = \frac{64}{Re} = \frac{8\tau_w}{\rho V^2}$$

$$f_F = \frac{f}{4}$$

EJEMPLO

GIVEN. The flowrate, G , of corn syrup through the horizontal pipe shown in Fig. E8.3a is to be monitored by measuring the pressure difference between sections (1) and (2). It is proposed that $G=KDp$, where the calibration constant, K , is a function of temperature, T , because of the variation of the syrup's viscosity and density with temperature. These variations are given in Table E8.3. **FIND** (a) Plot $K(T)$ versus T for $60 \leq T \leq 160^\circ\text{F}$ (b) Determine the wall shear stress and the pressure drop, for $G=0.5 \text{ ft}^3/\text{s}$ and $T=100^\circ\text{F}$. (c) For the conditions of part (b), determine the net pressure force, and the net shear force, on the fluid within the pipe between the sections (1) and (2).



■ Table E8.3

T ($^{\circ}\text{F}$)	ρ (slugs/ ft^3)	μ ($\text{lb} \cdot \text{s}/\text{ft}^2$)
60	2.07	4.0×10^{-2}
80	2.06	1.9×10^{-2}
100	2.05	3.8×10^{-3}
120	2.04	4.4×10^{-4}
140	2.03	9.2×10^{-5}
160	2.02	2.3×10^{-5}

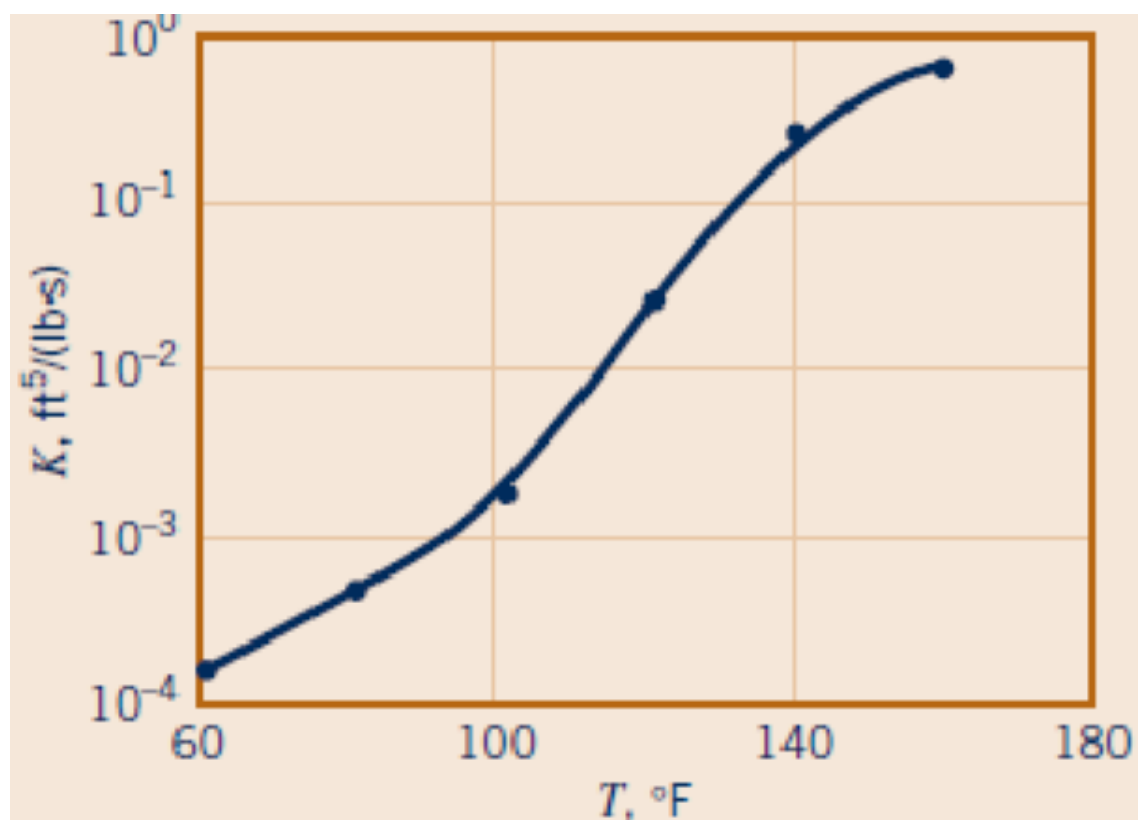
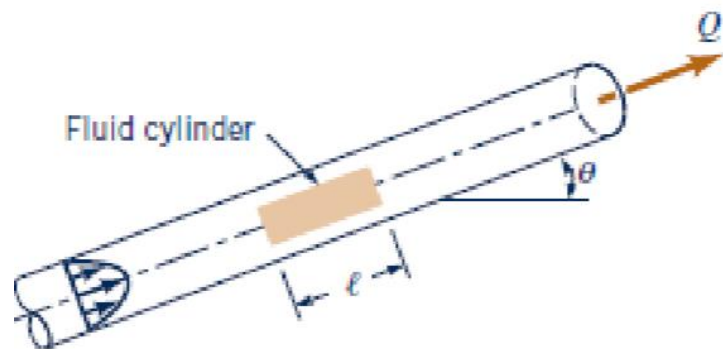


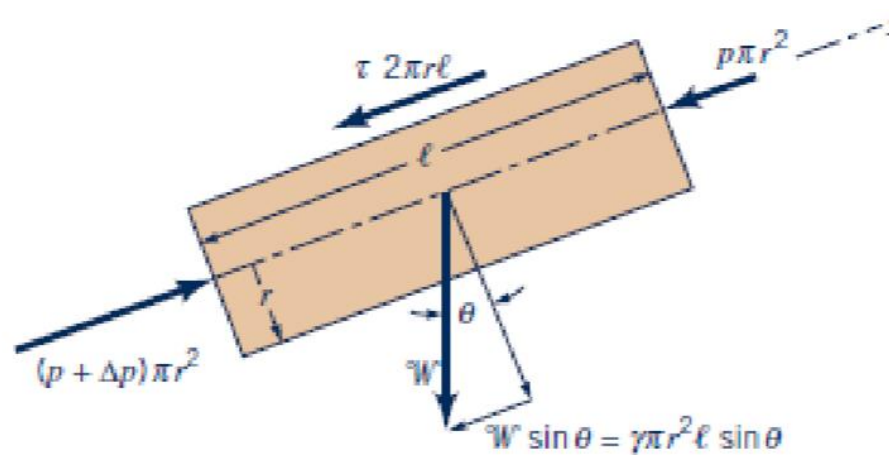
Figure E8.3

Para tubos no horizontales, la caída de presión es un efecto combinado de presión con pérdida de energía potencial

$$\frac{\Delta p - \rho g l \text{ sen } \theta}{l} = \frac{2\tau}{r}$$



(a)



(b)

$$V = \frac{(\Delta p - \rho g l \text{ sen } \theta) D^2}{32 \mu l}$$

$$G = \frac{\pi (\Delta p - \rho g l \text{ sen } \theta) D^4}{128 \mu l}$$

La componente de la energía potencial en el eje y es

$$z_2 - z_1 = l \text{ sen } \theta$$

Considerando la ecuación de la energía:

$$\frac{p_1}{\rho g} + z_1 - \frac{p_2}{\rho g} - z_2 = h_L$$

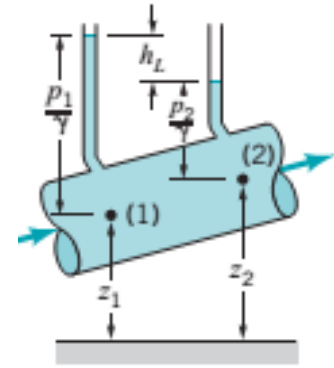
Y recordando que

$$z_1 - \frac{p_2}{\rho g} - z_2 = h_L$$

Nos permite inferir

$$h_L = \frac{2\tau l}{\rho g r} = \frac{4l\tau_w}{\rho g D}$$

Debido al tipo de análisis realizado, esta ecuación es válida tanto para flujo laminar como turbulento.

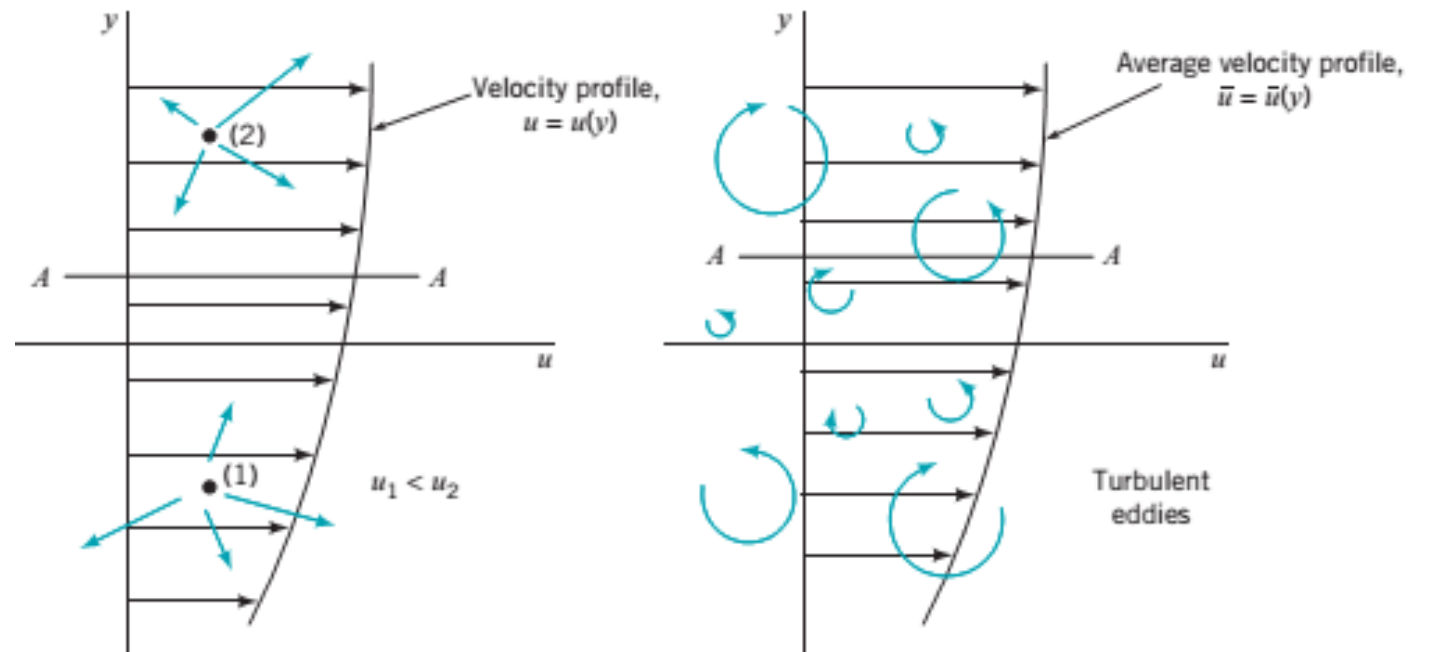


Flujo turbulento

La forma natural de incorporar los efectos de la turbulencia al flujo de fluidos fue mediante la suma de una componente adicional de transferencia de esfuerzo.

$$\tau = \mu \frac{d\bar{u}}{dy} - \overline{\rho u'v'} = \tau_{\text{lam}} + \tau_{\text{turb}}$$

$$\tau_{\text{turb}} = \eta \frac{d\bar{u}}{dy}$$

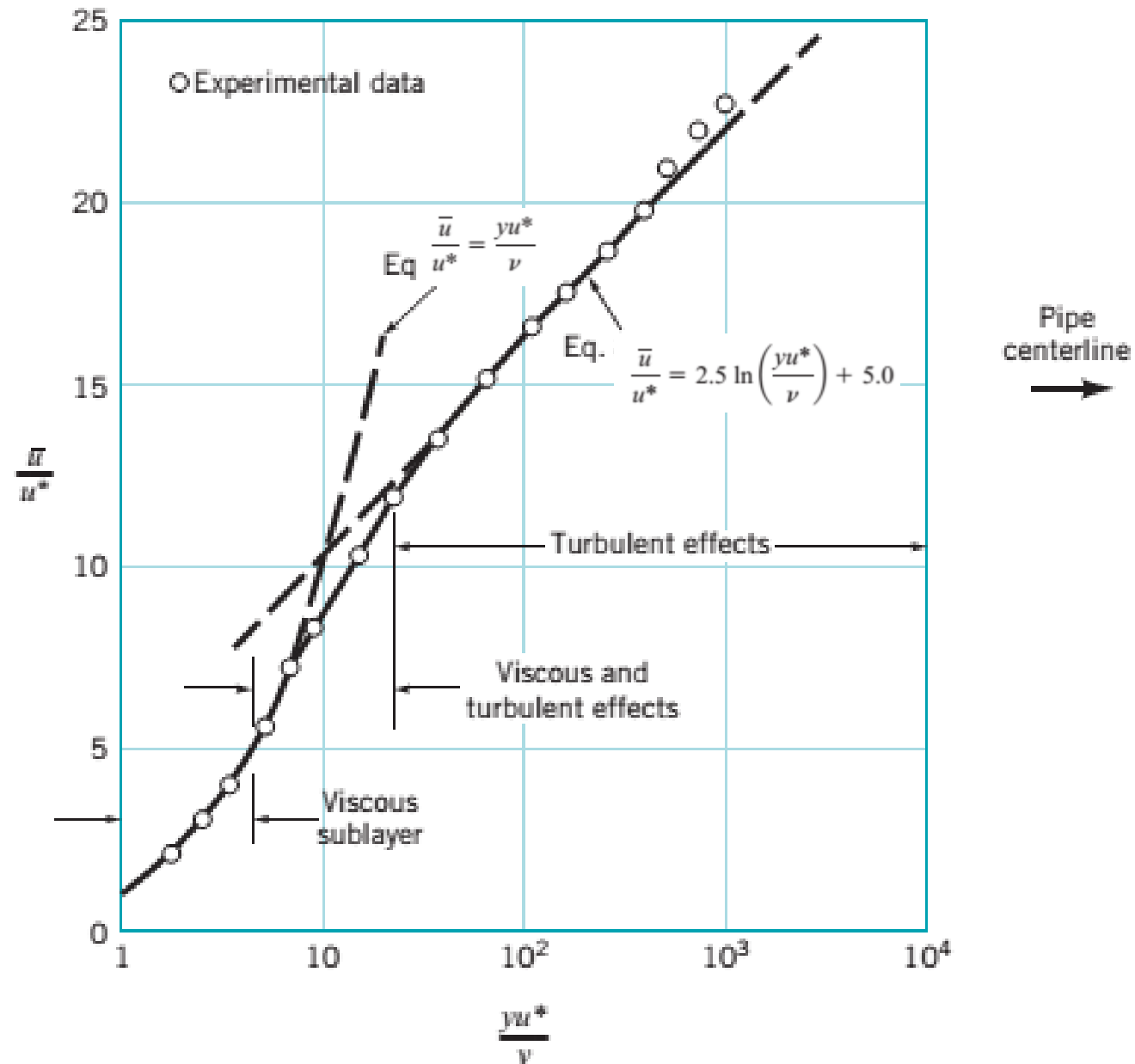


Longitud de mezclado

$$\eta = \rho \ell_m^2 \left| \frac{d\bar{u}}{dy} \right|$$

$$\tau_{\text{turb}} = \rho \ell_m^2 \left(\frac{d\bar{u}}{dy} \right)^2$$

$$\frac{\bar{u}}{V_c} = \left(1 - \frac{r}{R} \right)^{1/n}$$



Para el flujo turbulento, se puede expresar la caída de presión, según el análisis dimensional, como $\Delta p = F(V, D, \ell, \varepsilon, \mu, \rho)$

$$\frac{\Delta p}{\frac{1}{2}\rho V^2} = \tilde{\phi}\left(\frac{\rho V D}{\mu}, \frac{\ell}{D}, \frac{\varepsilon}{D}\right)$$

$$\Delta p = f \frac{\ell}{D} \frac{\rho V^2}{2}$$

$$\frac{p_1}{\gamma} + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\gamma} + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} + z_2 + h_L$$

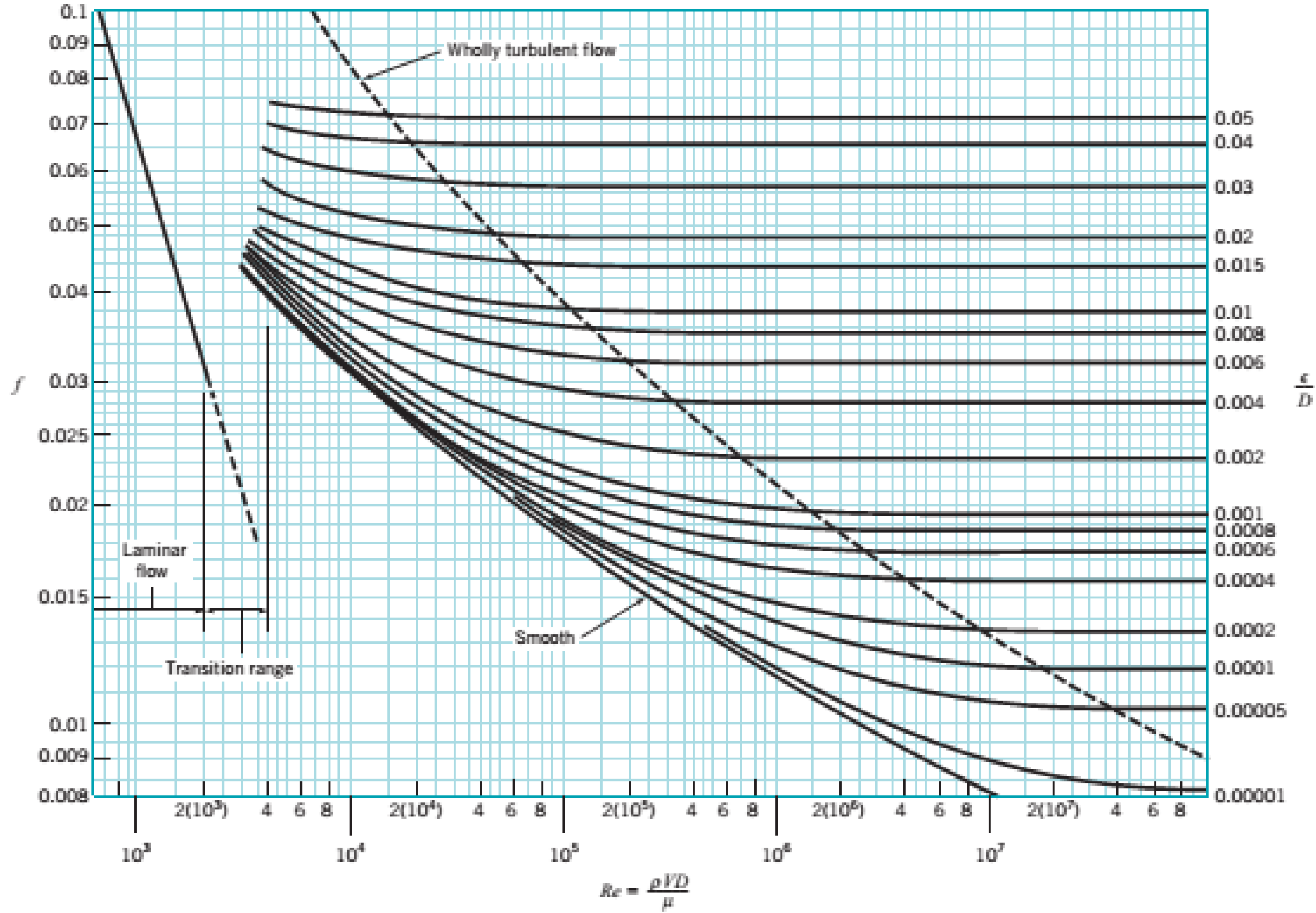
$$h_L = \frac{4l\tau_w}{\gamma D}$$

$$h_{L \text{ major}} = f \frac{\ell}{D} \frac{V^2}{2g}$$

$$p_1 - p_2 = \gamma(z_2 - z_1) + \gamma h_L = \gamma(z_2 - z_1) + f \frac{\ell}{D} \frac{\rho V^2}{2}$$

Equivalent Roughness for New Pipes [From Moody (Ref. 7) and Colebrook (Ref. 8)]

Pipe	Equivalent Roughness, ϵ	
	Feet	Millimeters
Riveted steel	0.003–0.03	0.9–9.0
Concrete	0.001–0.01	0.3–3.0
Wood stave	0.0006–0.003	0.18–0.9
Cast iron	0.00085	0.26
Galvanized iron	0.0005	0.15
Commercial steel or wrought iron	0.00015	0.045
Drawn tubing	0.000005	0.0015
Plastic, glass	0.0 (smooth)	0.0 (smooth)



$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2.0 \log \left(\frac{\varepsilon/D}{3.7} + \frac{2.51}{Re \sqrt{f}} \right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -1.8 \log \left[\left(\frac{\varepsilon/D}{3.7} \right)^{1.11} + \frac{6.9}{Re} \right]$$

$$f = \frac{0.25}{\left[\log \left(\frac{1}{3.7 \left(\frac{D}{\varepsilon} \right)} + \frac{5.74}{Re^{0.9}} \right) \right]^2}$$

1% de error

- Determine la pérdida de energía si a través de una tubería estándar DN 150 mm cédula 80 fluye glicerina a 25°C a lo largo de 30 m con una velocidad promedio de 4 m/s.
- Determine el factor de fricción f si fluye agua a 160°F y 30 ft/s en una tubería de acero cédula 40.
- Determine el factor de fricción del problema anterior si la velocidad del agua es 0.45 ft/s.
- Se tiene un tanque de almacenamiento industrial desde donde una tubería horizontal de 100 m de largo conduce agua a 25°C hasta un proceso en el que se prepara un producto alimenticio a gran escala. La tubería es de acero DN 50 cédula 40 y el caudal de entrega al proceso es de 520 L/min. Determine la caída de presión en la tubería desde el tanque de almacenamiento hasta el sistema de procesamiento.

GIVEN Air under standard conditions flows through a 4.0-mm-diameter drawn tubing with an average velocity of $V = 50$ m/s. For such conditions the flow would normally be turbulent. However, if precautions are taken to eliminate disturbances to the flow (the entrance to the tube is very smooth, the air is dust free, the tube does not vibrate, etc.), it may be possible to maintain laminar flow.

FIND (a) Determine the pressure drop in a 0.1-m section of the tube if the flow is laminar.
(b) Repeat the calculations if the flow is turbulent.

Secciones transversales no circulares

El procedimiento para resolver tuberías con secciones transversales no circulares es el mismo, solo debe usarse el diámetro hidráulico en los cálculos para el Re y pérdidas.

$$h_L = f \frac{L}{D_H} \frac{V^2}{2g}$$

La rugosidad relativa será entonces ε/D_H .

Pérdidas menores

Las pérdidas de energía son proporcionales a la carga de velocidad del fluido a medida que fluye por cualquier accesorio. Generalmente, los valores experimentales de las pérdidas de energía se reportan en términos de un coeficiente de resistencia, K:

$$h_{Lm} = K \left(\frac{V^2}{2g} \right)$$

K es el coeficiente de resistencia y V es la velocidad de flujo promedio en la tubería en las cercanías de donde se produce la pérdida menor. La magnitud de esta constante depende de la geometría del dispositivo que causa la pérdida y de la velocidad.

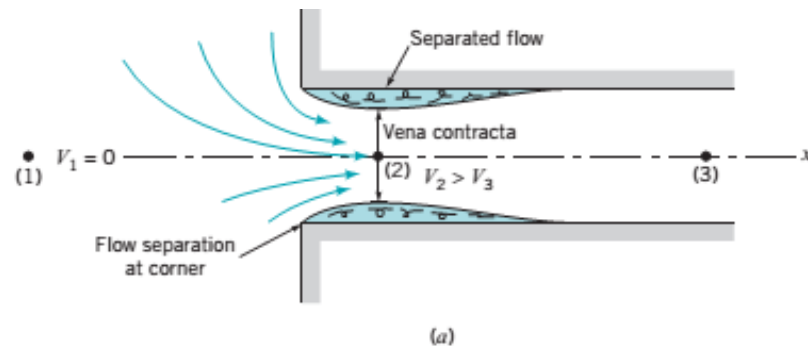
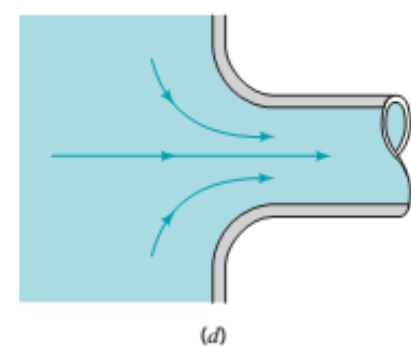
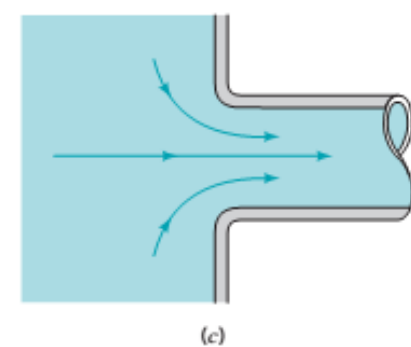
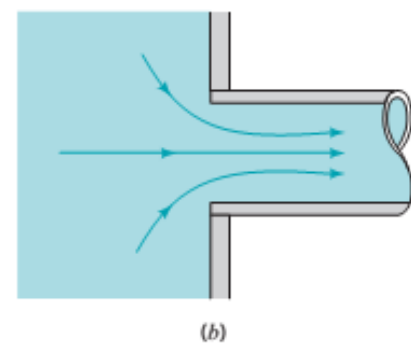
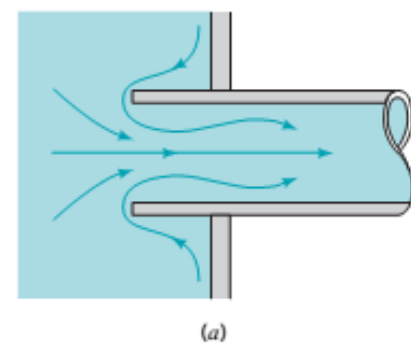
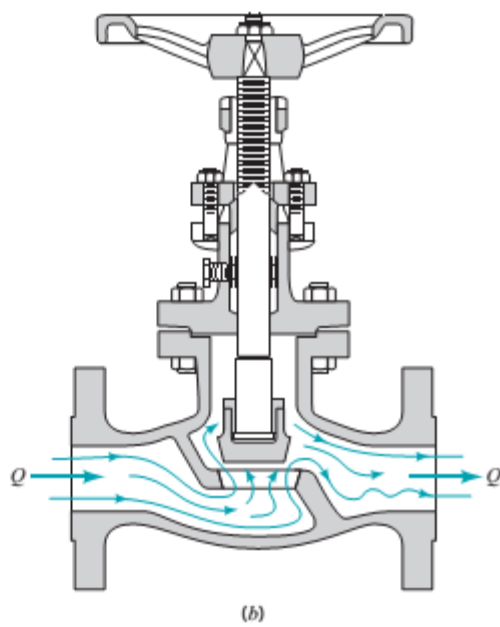
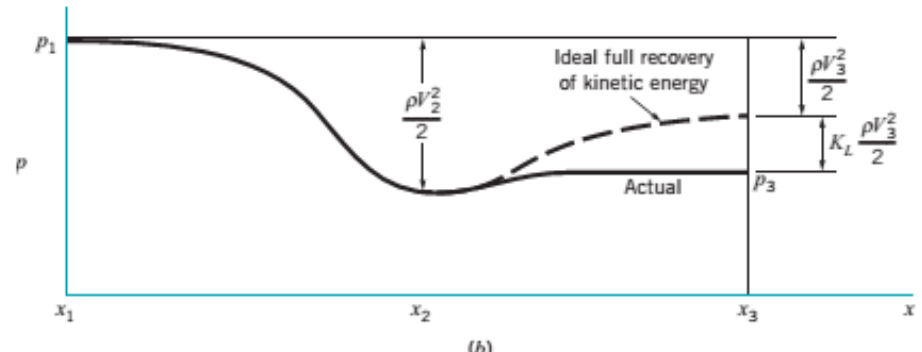
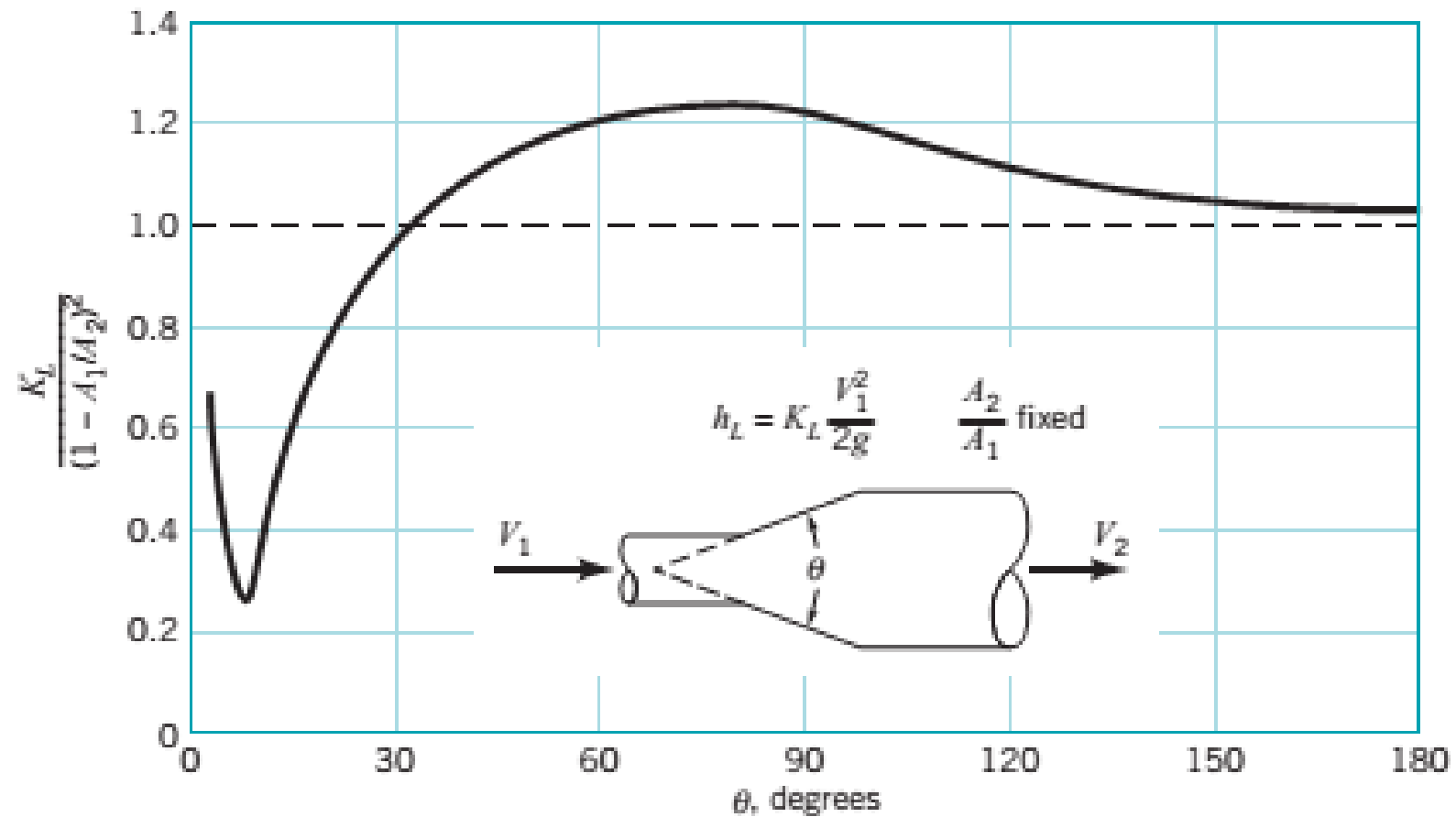
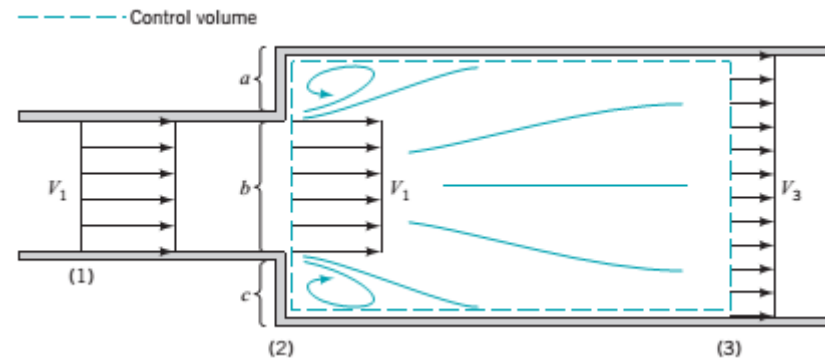
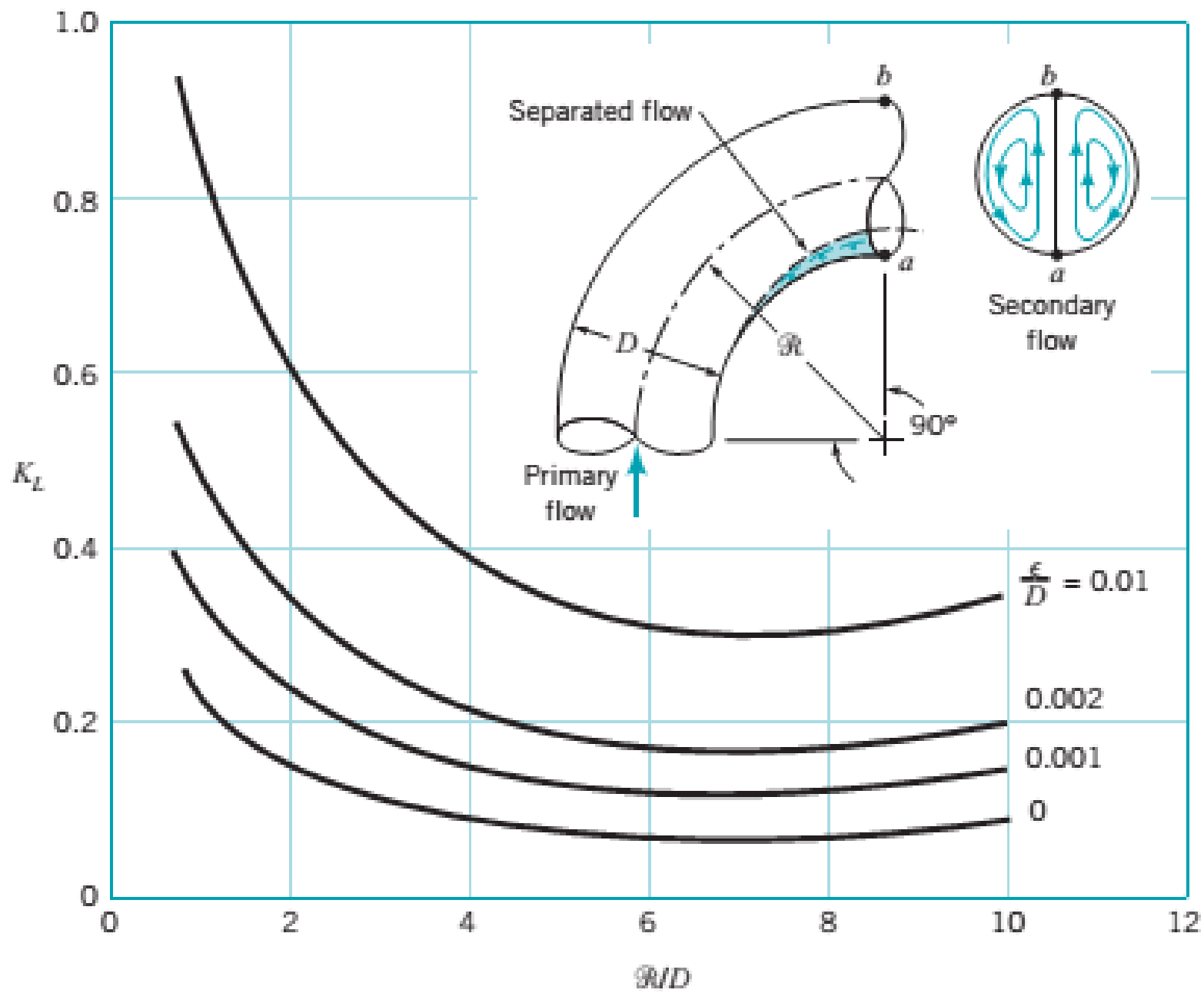


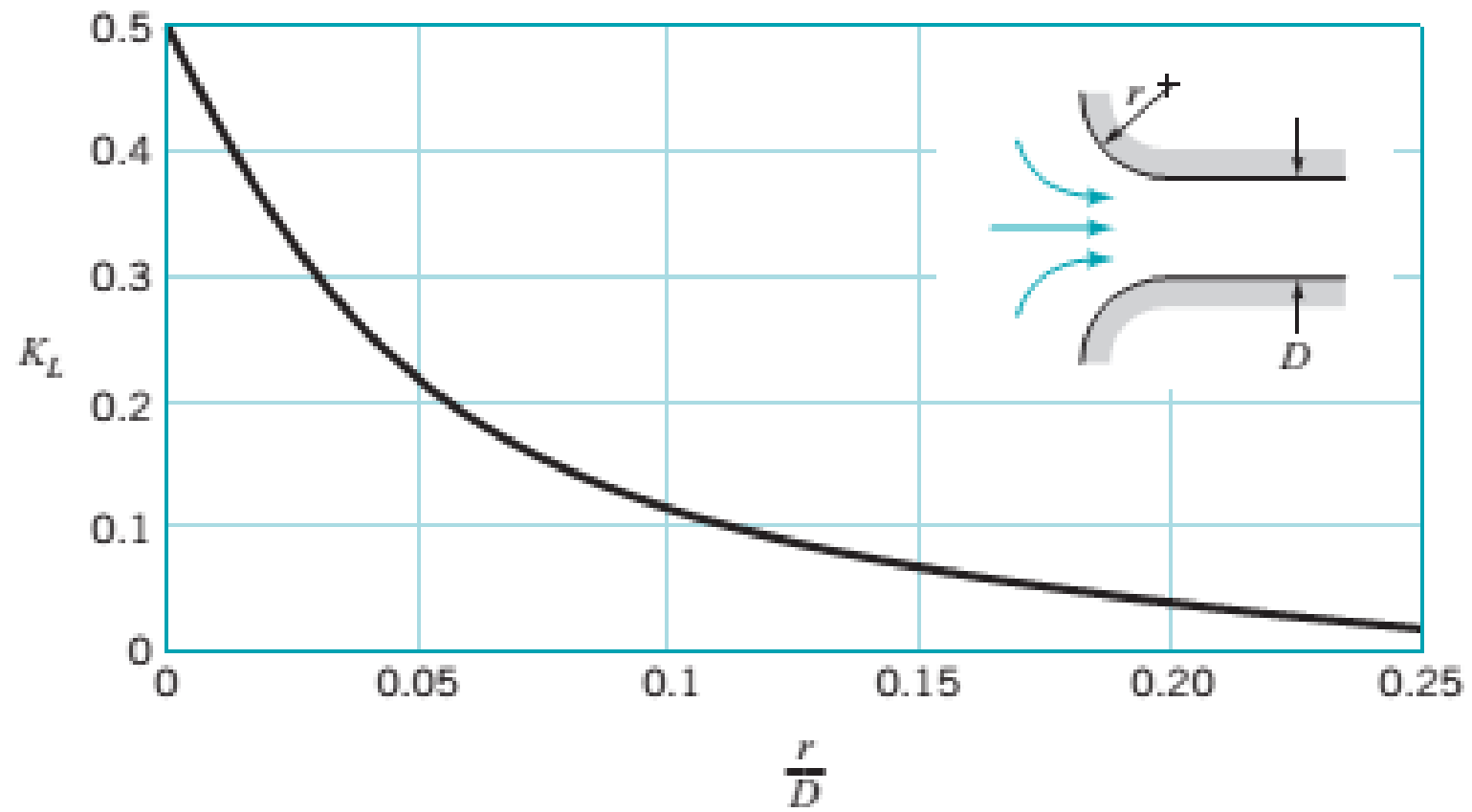
FIGURE 8.22 Entrance flow conditions and loss coefficient (Refs. 28, 29). (a) Reentrant, $K_L = 0.8$, (b) sharp-edged, $K_L = 0.5$, (c) slightly rounded, $K_L = 0.2$ (see Fig. 8.24), (d) well-rounded, $K_L = 0.04$ (see Fig. 8.24).

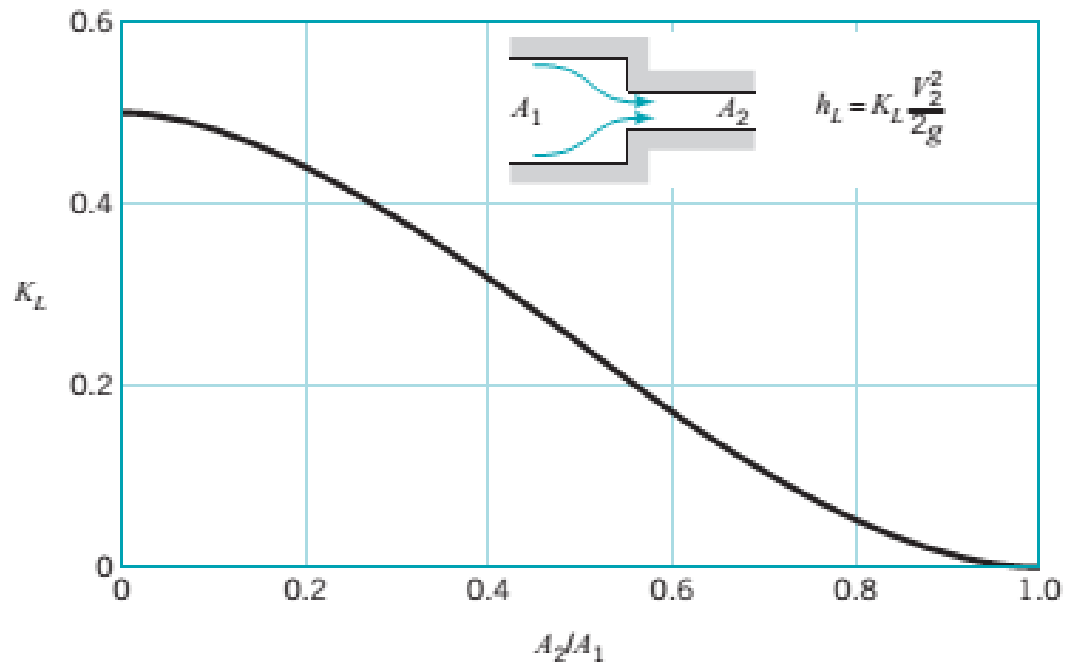


$$K_L = \left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)^2$$

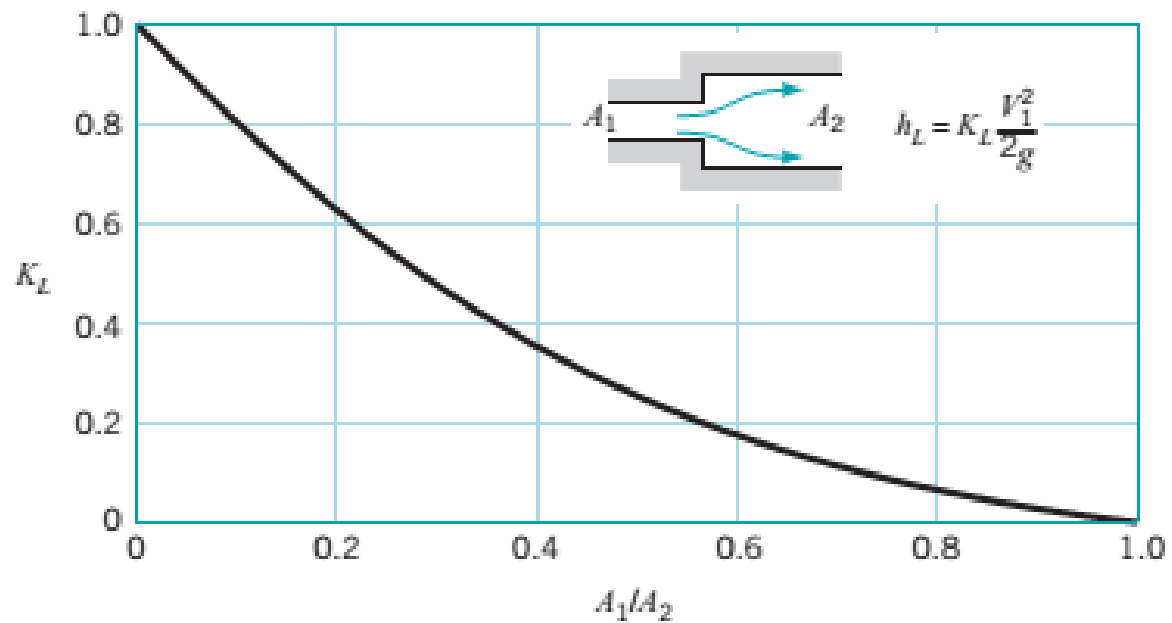




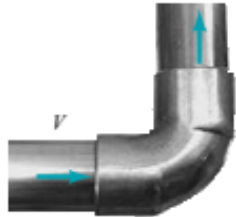

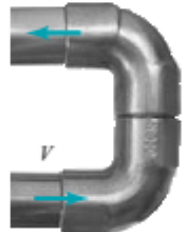







■ **FIGURE 8.26**
Loss coefficient for a sudden contraction (Ref. 10).



■ **FIGURE 8.27**
Loss coefficient for a sudden expansion (Ref. 10).

Component	K_L	
a. Elbows		
Regular 90°, flanged	0.3	
Regular 90°, threaded	1.5	
Long radius 90°, flanged	0.2	
Long radius 90°, threaded	0.7	
Long radius 45°, flanged	0.2	
Regular 45°, threaded	0.4	
b. 180° return bends		
180° return bend, flanged	0.2	
180° return bend, threaded	1.5	
c. Tees		
Line flow, flanged	0.2	
Line flow, threaded	0.9	
Branch flow, flanged	1.0	
Branch flow, threaded	2.0	
d. Union, threaded		
	0.08	
*e. Valves		
Globe, fully open	10	
Angle, fully open	2	
Gate, fully open	0.15	
Gate, 1/4 closed	0.26	
Gate, 1/2 closed	2.1	
Gate, 3/4 closed	17	
Swing check, forward flow	2	
Swing check, backward flow	∞	
Ball valve, fully open	0.05	
Ball valve, 1/3 closed	5.5	
Ball valve, 2/3 closed	210	

Las pérdidas menores a veces se dan en términos de longitud equivalente, L_{eq} . La pérdida de cabeza a través del accesorio representa una longitud equivalente de tubería recta que produce la misma pérdida que el accesorio.

$$h_{Lm} = K \frac{V^2}{2g} = f \frac{L_{eq}}{D} \frac{V^2}{2g}$$
$$L_{eq} = \frac{KD}{f}$$

Por tanto, para calcular la pérdida de un sistema de tuberías se puede sumar la longitud total de tubería recta con la longitud equivalente de los componentes y a partir de esto usar la ecuación de Darcy.

Problemas de tuberías simples

El proceso de solución depende en cuáles parámetros son los independientes (los proporcionados) y cuáles son los dependientes (los que hay que determinar).

Hay 3 tipos de problemas más comunes, que se mencionan en la tabla.

Pipe Flow Types

Variable	Type I	Type II	Type III
a. Fluid			
Density	Given	Given	Given
Viscosity	Given	Given	Given
b. Pipe			
Diameter	Given	Given	Determine
Length	Given	Given	Given
Roughness	Given	Given	Given
c. Flow			
Flowrate or Average Velocity	Given	Determine	Given
d. Pressure			
Pressure Drop or Head Loss	Determine	Given	Given

En los problemas de tipo I, se especifica el flujo o la velocidad y se determina la caída de presión o las pérdidas de cabeza.

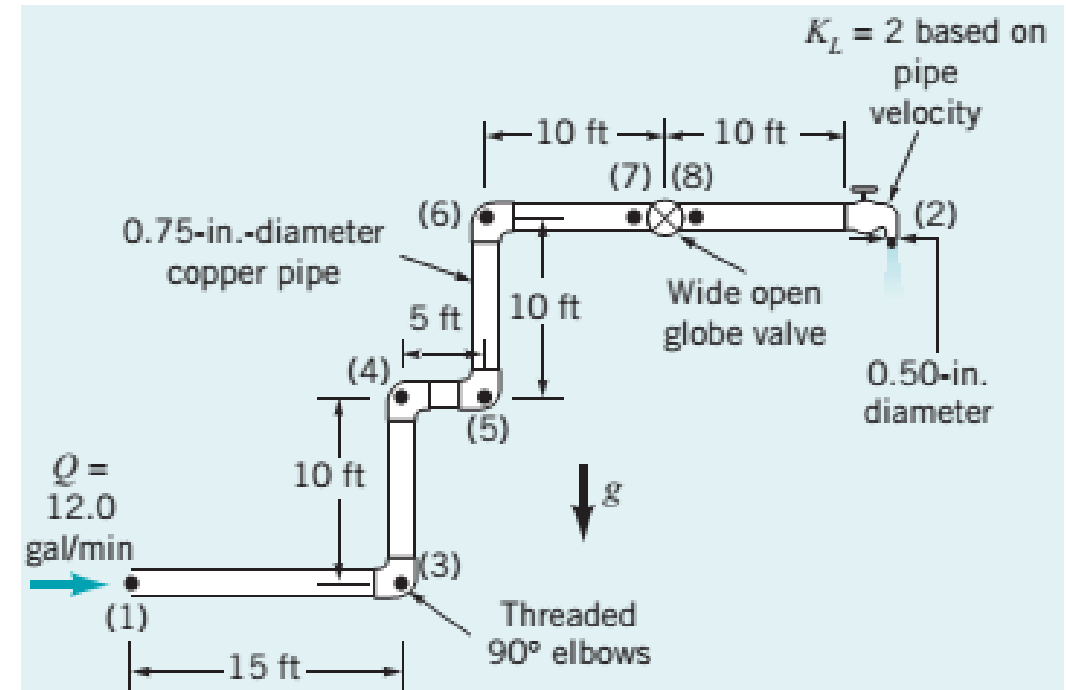
En los problemas de tipo II, se especifica una diferencia de presiones aplicable (o pérdida de cabeza) y se determina el flujo. Estos pueden requerir de prueba y error o búsqueda de raíces.

En los problemas de tipo III, se especifica la caída de presión y la velocidad de flujo y se determina el diámetro necesario para la tubería.

GIVEN Water at 60 °F flows from the basement to the second floor through the 0.75-in. (0.0625-ft)-diameter copper pipe (a drawn tubing) at a rate of $Q = 12.0 \text{ gal/min} = 0.0267 \text{ ft}^3/\text{s}$ and exits through a faucet of diameter 0.50 in. as shown in Fig. E8.8a.

FIND Determine the pressure at point (1) if

- (a) all losses are neglected,
- (b) the only losses included are major losses, or
- (c) all losses are included.

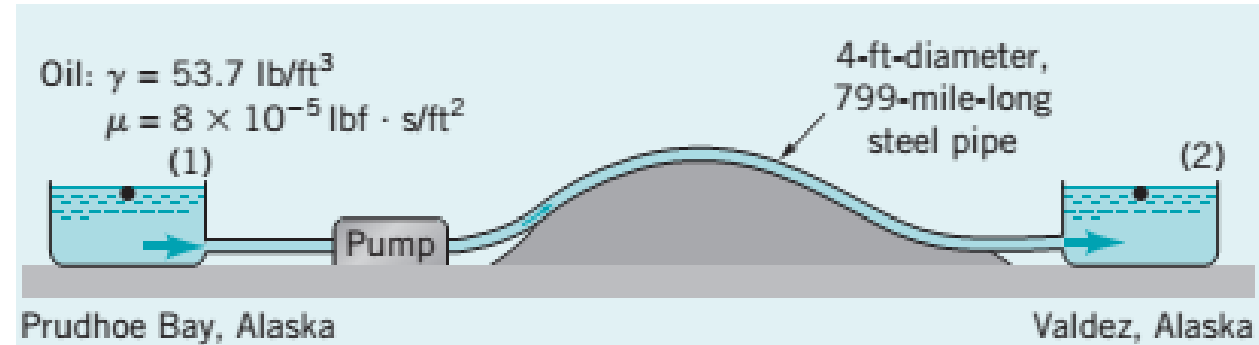


Type I, Determine Head Loss

GIVEN As shown in Fig. E8.9a, crude oil at 140 °F with $\gamma = 53.7 \text{ lb/ft}^3$ and $\mu = 8 \times 10^{-5} \text{ lb} \cdot \text{s/ft}^2$ (about four times the viscosity of water) is pumped across Alaska through the Alaskan pipeline, a 799-mile-long, 4-ft-diameter steel pipe, at a maximum rate of $Q = 2.4$ million barrels/day = $117 \text{ ft}^3/\text{s}$.

FIND Determine the horsepower needed for the pumps that drive this large system.

$$R = 210,802 \text{ HP}$$



Type II, Determine Flowrate

GIVEN Air at a temperature of 100 °F and standard pressure flows from a clothes dryer. According to the appliance manufacturer, the 4-in.-diameter galvanized iron vent on the clothes dryer is not to contain more than 20 ft of pipe and four 90° elbows.

FIND Under these conditions determine the air flowrate if the pressure at the start of the vent pipe, directly downstream of the dryer fan, is 0.20 in. of water.

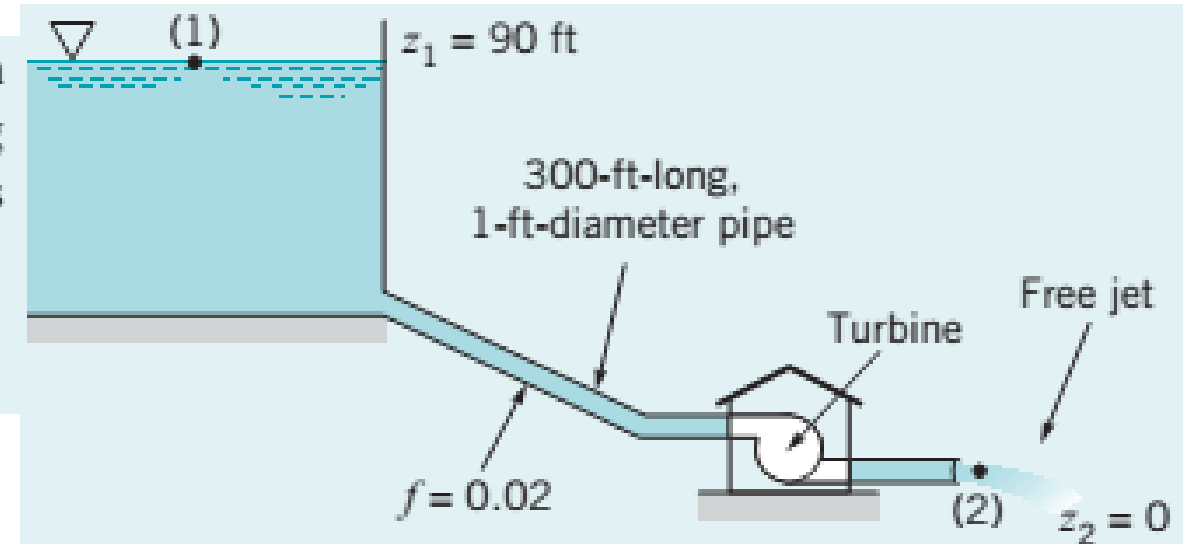
$$R =$$

Type II, Determine Flowrate

GIVEN The turbine shown in Fig. E8.11 extracts 50 hp from the water flowing through it. The 1-ft-diameter, 300-ft-long pipe is assumed to have a friction factor of 0.02. Minor losses are negligible.

FIND Determine the flowrate through the pipe and turbine.

$$R = 6.58 \text{ ft}^3/\text{s} \quad \text{or} \quad 24.9 \text{ ft}^3/\text{s}$$



Type III without Minor Losses, Determine Diameter

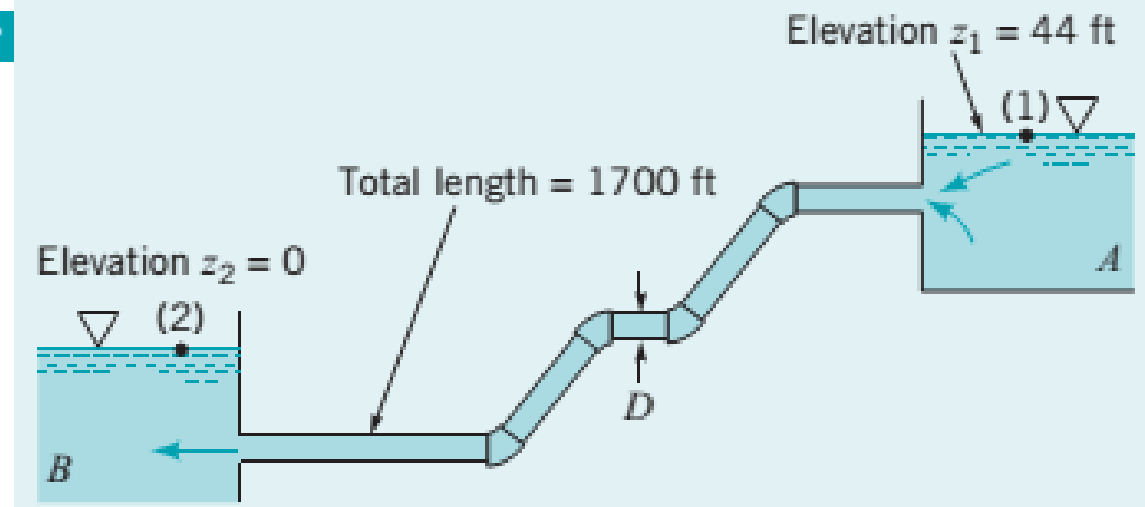
GIVEN Air at standard temperature and pressure flows through a horizontal, galvanized iron pipe ($\epsilon = 0.0005 \text{ ft}$) at a rate of $2.0 \text{ ft}^3/\text{s}$. The pressure drop is to be no more than 0.50 psi per 100 ft of pipe.

FIND Determine the minimum pipe diameter.

Type III with Minor Losses, Determine Diameter

GIVEN Water at 60°F ($\nu = 1.21 \times 10^{-5} \text{ ft}^2/\text{s}$, see Table 1.5) is to flow from reservoir A to reservoir B through a pipe of length 1700 ft and roughness 0.0005 ft at a rate of $Q = 26 \text{ ft}^3/\text{s}$ as shown in Fig. E8.13a. The system contains a sharp-edged entrance and four flanged 45° elbows.

FIND Determine the pipe diameter needed.



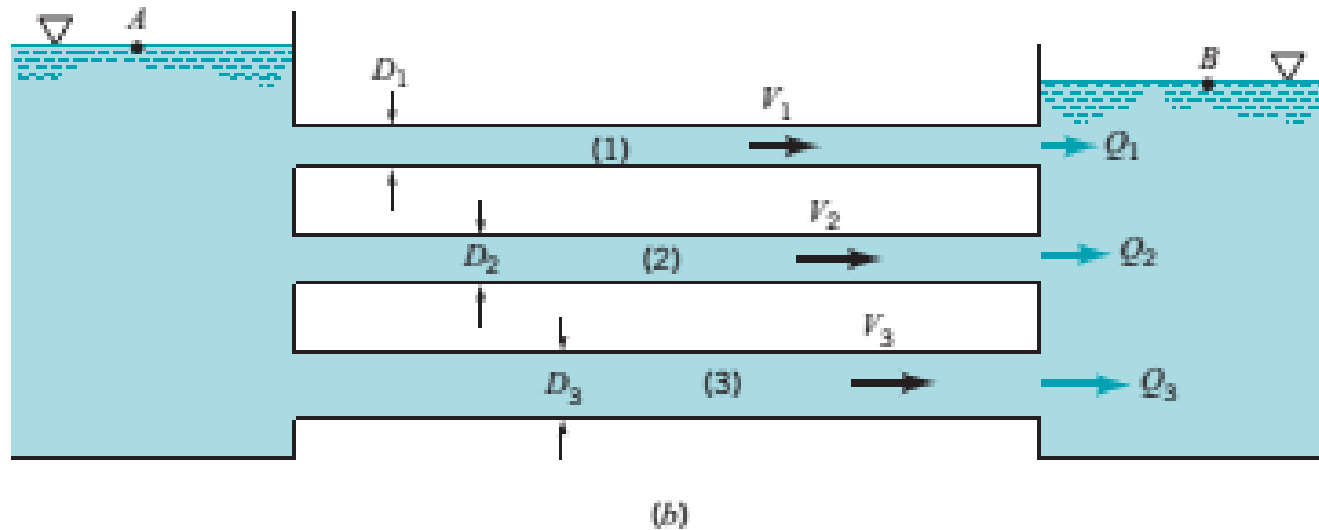
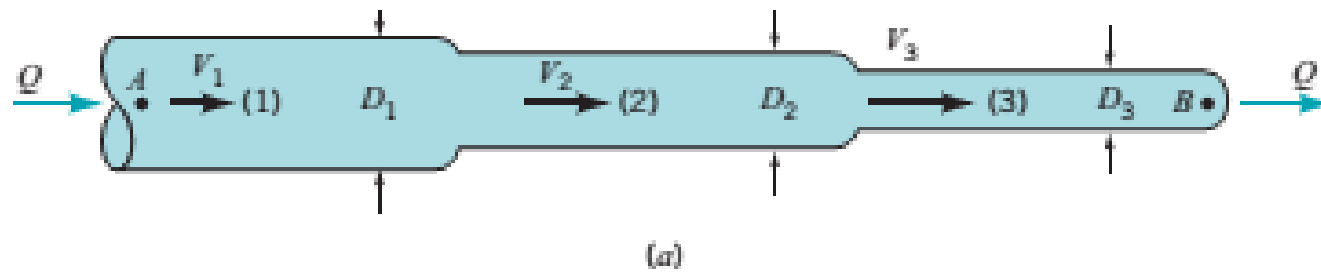
$$h_L = K \frac{v^2}{2g} = f \frac{L_{eq}}{D} \frac{v^2}{2g}$$
$$L_{eq} = \frac{KD}{f}$$

Por tanto, para calcular la pérdida de un sistema de tuberías se puede sumar la longitud total de tubería recta con la longitud equivalente de los componentes y a partir de esto usar la ecuación de Darcy.

Si las pérdidas menores de una tubería de 1 ft son $K=20$ y $f=0.02$, se tiene que $L_{eq}=1000$ ft. Esto significa que esta longitud debe sumarse a la tubería recta. Por otro lado, estos accesorios causan la misma pérdida que 1000 ft de tubería recta.

TUBERÍAS EN SERIE

Se da cuando dos tuberías de diferente tamaño o rugosidad se conectan de modo que el fluido fluya por una tubería y luego por la otra.



En los sistemas en serie, la velocidad de flujo es la misma en todos los tubos (por la ecuación de continuidad), y la caída de cabeza desde el punto A al punto B es la suma de caídas en cada uno de los tubos.

$$G_1 = G_2 = G_3$$
$$h_{L_{A-B}} = h_{L_1} + h_{L_2} + h_{L_3}$$
$$h_{L_{A-B}} = \frac{v_1^2}{2g} (C_1 + C_2 f_1 + C_3 f_2)$$

Si se conocen las dimensiones de las tuberías, se pueden calcular las constantes. Si se conoce la descarga, se calcula el número de Reynolds y los f .

Cuando se proporciona h , la velocidad y factores de fricción son incógnitas y se debe resolver por iteración.

En lugar de esto, se puede elaborar un gráfico de G vs h . De este modo, cuando se proporciona h , se puede leer directamente el valor de la descarga en este tipo de gráfico.

8.45 Water flows through a 6-in.-diameter horizontal pipe at a rate of 2.0 cfs and a pressure drop of 4.2 psi per 100 ft of pipe. Determine the friction factor.

8.54 Gasoline flows in a smooth pipe of 40-mm diameter at a rate of $0.001 \text{ m}^3/\text{s}$. If it were possible to prevent turbulence from occurring, what would be the ratio of the head loss for the actual turbulent flow compared to that if it were laminar flow?

8.75 Air at standard conditions flows through a horizontal 1 ft by 1.5 ft rectangular wooden duct at a rate of $5000 \text{ ft}^3/\text{min}$. Determine the head loss, pressure drop, and power supplied by the fan to overcome the flow resistance in 500 ft of the duct.

TUBERÍAS EQUIVALENTES

Se dice que dos sistemas de tuberías son equivalentes si la misma pérdida de carga produce la misma descarga en ambos sistemas.

$$h_{L_1} = \frac{f_1 L_1}{D_1} \frac{G_1^2}{\left(\frac{D_1^2 \pi}{4}\right)^2 2g} = \frac{f_1 L_1}{D_1^5} \frac{8G_1^2}{\pi^2 g}$$

Y para la segunda tubería

$$h_{L_2} = \frac{f_2 L_2}{D_2^5} \frac{8G_2^2}{\pi^2 g}$$

Al igualar las pérdidas y despejar para una nueva longitud se obtiene

$$L_2 = L_1 \frac{f_1}{f_2} \left(\frac{D_2}{D_1}\right)^5$$

Esta ecuación determina la longitud de tubería a usar con otro diámetro diferente.

Por tanto, dos o más tuberías de un sistema pueden ser sustituidos por una tubería con la misma descarga y la misma pérdida total.

TUBERIAS EN PARALELO

En estos sistemas, las pérdidas de carga son las mismas en cualquiera de las líneas y la descarga es acumulable.

Las condiciones que deben cumplirse son

$$G = G_1 + G_2 + G_3$$
$$h_{L_1} = h_{L_2} = h_{L_3} = \frac{p_1}{\gamma} + z_1 - \left(\frac{p_2}{\gamma} + z_2 \right)$$

Aquí se presentan dos tipos de problemas: (1) Si se conoce la línea de altura motriz en 1 y 2, se pide conocer la descarga G ; (2) Si se conoce G , calcular la distribución del flujo y la pérdida de carga. Se deben conocer las características de la tubería, así como las propiedades del fluido.

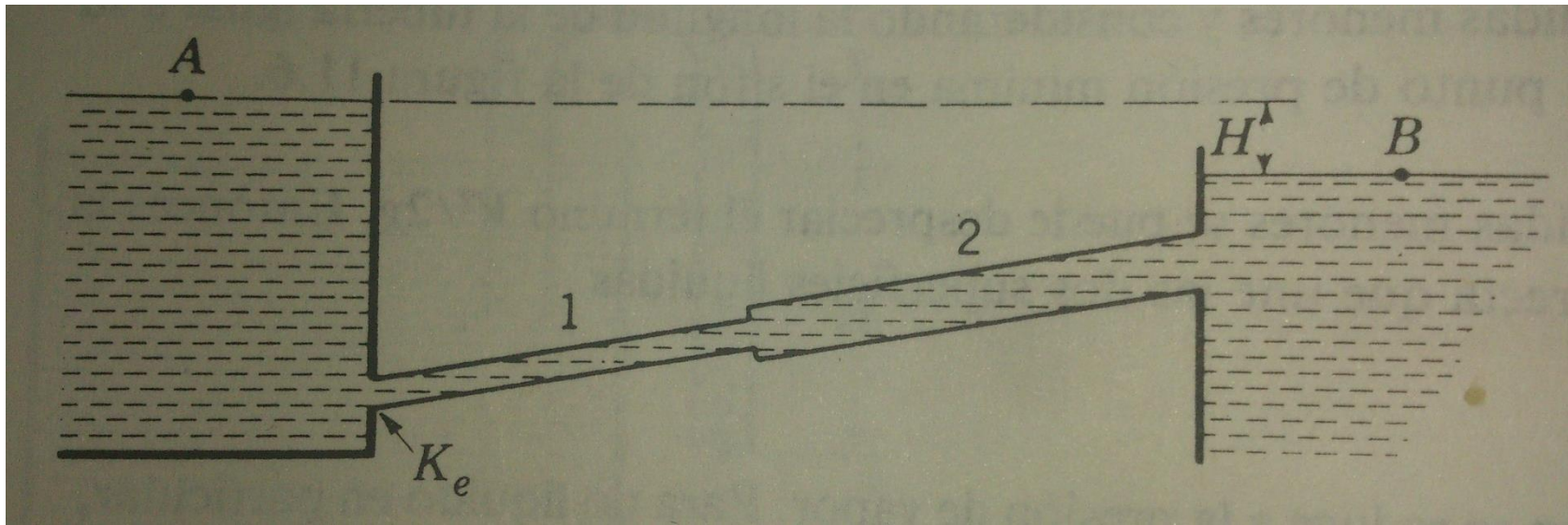
Procedimiento recomendado

1. Suponer una descarga G'_1 en la tubería 1.
2. Calcular h_{L1}' con la descarga anterior.
3. Calcular G'_2 y G'_3 usando h_{L1}' .
4. Para estas 3 descargas con pérdida de carga común, supóngase que el G dado se distribuye en las tuberías con la misma proporción que G'_1 , G'_2 y G'_3 ; por lo tanto, se tendrá:

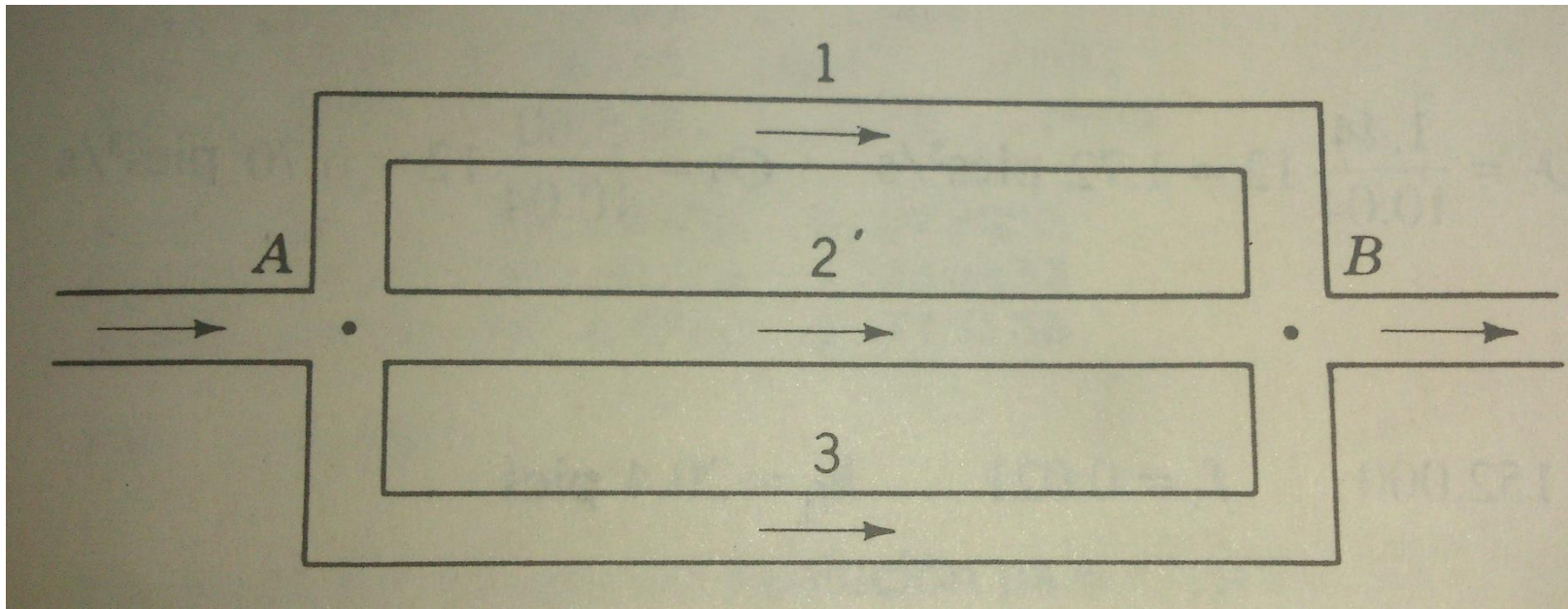
$$G_1 = \frac{G'_1}{\sum G'} G \quad G_2 = \frac{G'_2}{\sum G'} G \quad G_3 = \frac{G'_3}{\sum G'} G$$

5. Comprobar la validez de estas descargas calculando h_{L1} , h_{L2} , h_{L3} para los flujos calculados.

Este procedimiento funciona para cualquier número de tuberías.

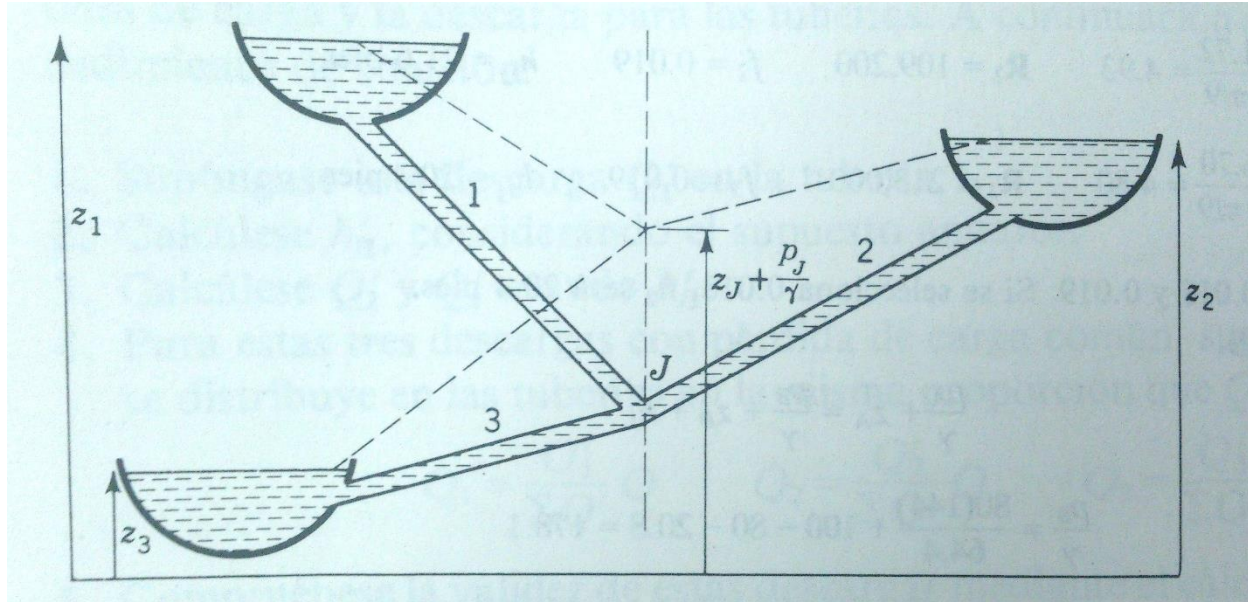


En la figura, $K_e=0.5$, $L_1=300$ m, $D_1 = 600$ mm, $\varepsilon_1 = 2$ mm, $L_2=240$ m, $D_2=1$ m, $\varepsilon_2=0.3$ mm, $\nu=3 \times 10^{-6}$ m²/s y $H=6$ m. Determine la descarga del sistema.



En la figura, $L_1=3000$ ft, $D_1=1$ ft, $\varepsilon_1=0.001$ ft, $L_2=2000$ ft, $D_2=8$ in, $\varepsilon_2=0.0001$ ft, $L_3=4000$ ft, $D_3=16$ in, $\varepsilon_3=0.0008$ ft, $\rho=2$ slug/ft³, $\nu=0.00003$ ft²/s, $p_A=80$ psia, $z_A=100$ ft, $z_B=80$ ft. Para un flujo total de 12 ft³/s, determine el flujo a través de cada tubería y la presión en B.

Tuberías interconectadas



En este tipo de problemas, un factor importante es el análisis de nodos. El flujo que entra en la unión J debe ser igual al flujo de salida. La dirección de flujo debe ser del depósito más alto al más bajo, por lo que la ecuación de continuidad es:

$$G_1 = G_2 + G_3$$

O bien

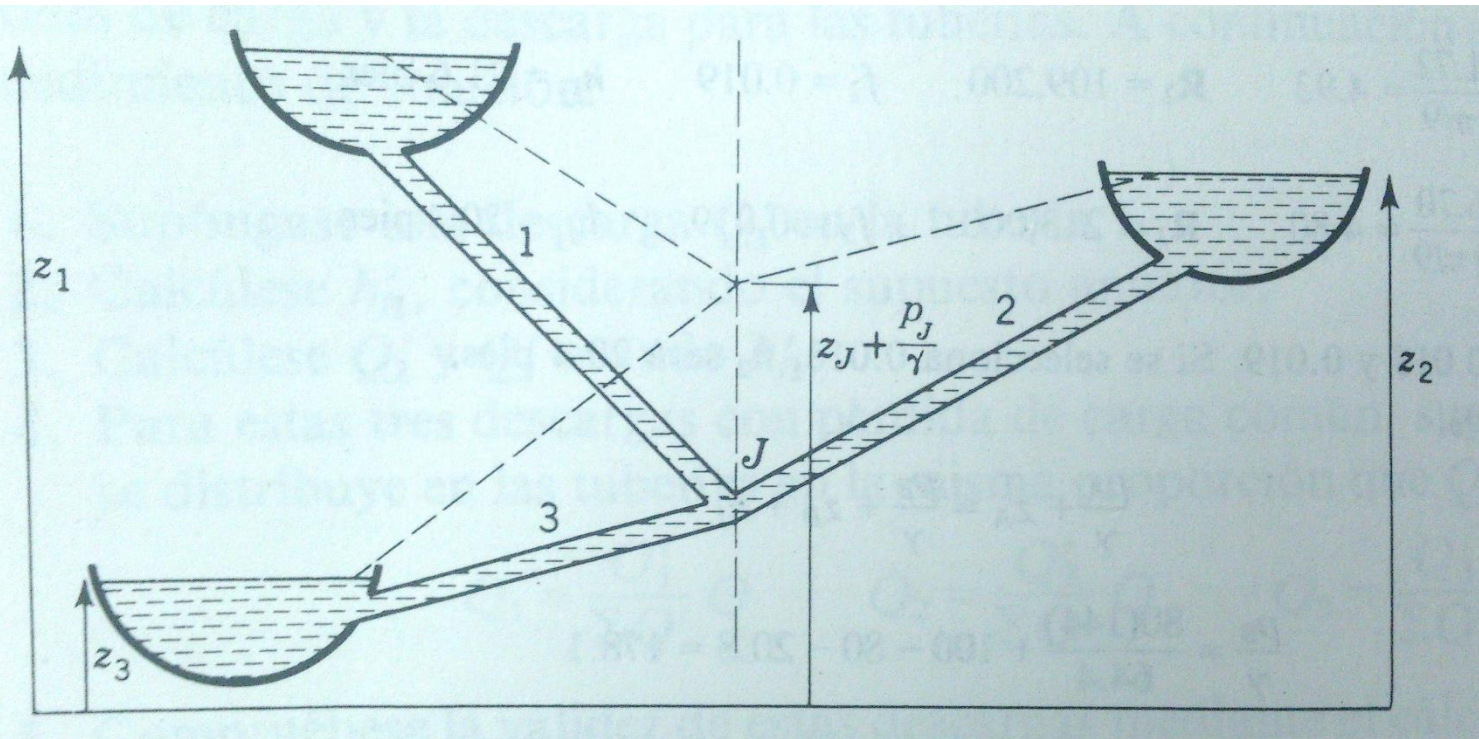
$$G_1 + G_2 = G_3$$

Si la elevación de la altura motriz en la unión está por encima de la elevación del depósito intermedio, entonces el flujo se da hacia este depósito. Sin embargo, si la elevación de la línea de altura motriz de J está por debajo del depósito intermedio, el flujo sale de este depósito.

Las pérdidas menores pueden expresarse como longitudes equivalentes y sumadas a las longitudes reales de las tuberías.

Por tanto, el problema se resuelve suponiendo una elevación de altura motriz para la unión J, calculando G_1 , G_2 , G_3 y sustituyendo estos valores en la ecuación de continuidad.

Si se observa que el flujo que entra a una unión es muy grande, se aconseja suponer una elevación mayor de la línea de altura motriz, ya que esto reduce el flujo de entrada y aumenta el flujo de salida.



Encuéntrense las descargas de la figura, si fluye agua entre los depósitos y $L_1=3000$ m, $D_1=1$ m, $\varepsilon_1/D_1=0.0002$, $L_2=600$ m, $D_2=0.45$ m, $\varepsilon_2/D_2=0.002$, $L_3=1000$ m, $D_3=0.6$ m, $\varepsilon_3/D_3=0.001$, $z_1=30$ m, $z_2=18$ m, $z_3=9$ m.

El balance de Bernoulli se realiza de manera parcial, entre cada depósito y la unión J. Si se considera $z_J + p_J/g = 23$:

$$7 = f_1 \frac{3000}{1} \frac{V_1^2}{2g}$$

$$5 = f_2 \frac{600}{0.45} \frac{V_2^2}{2g}$$

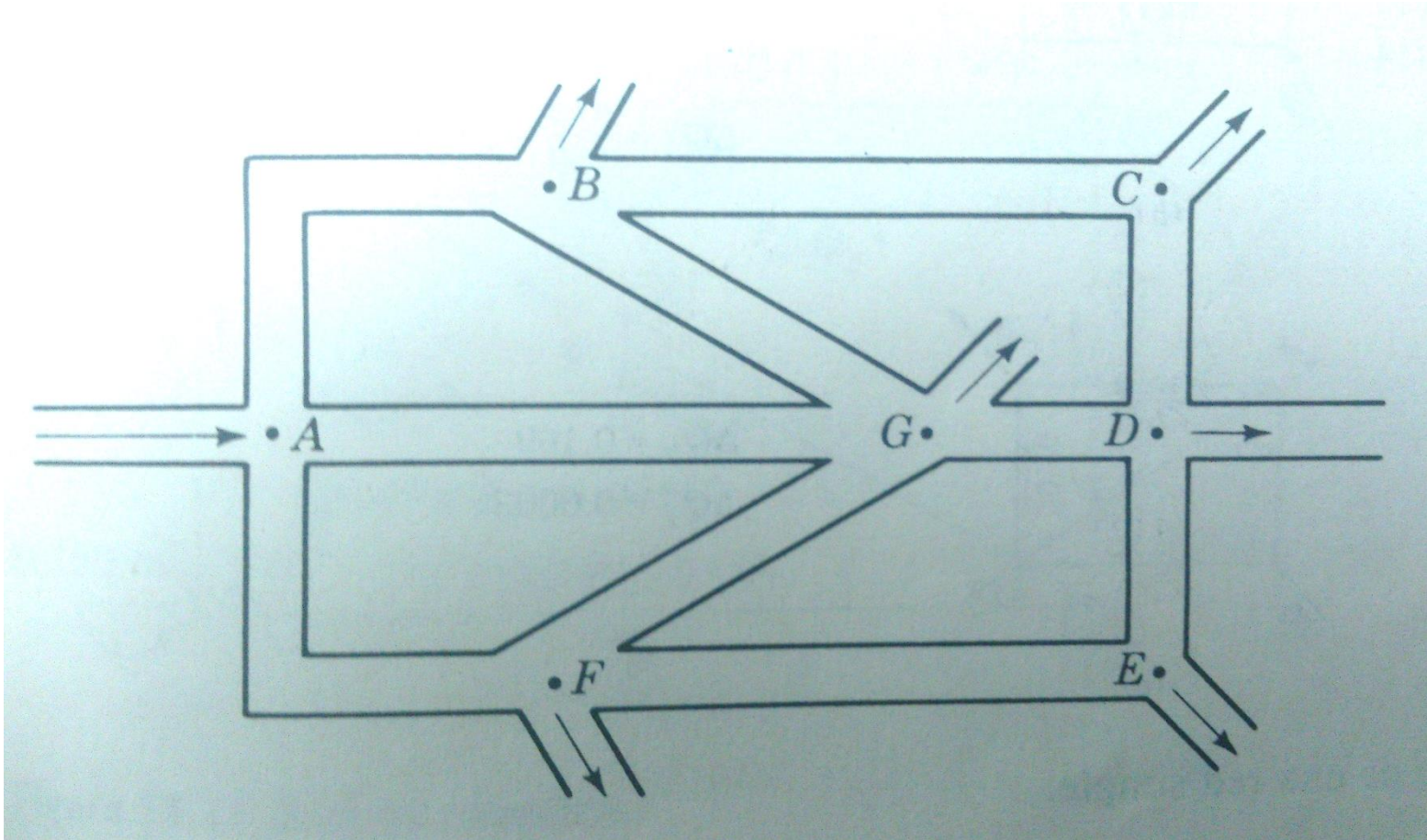
$$14 = f_3 \frac{1000}{0.6} \frac{V_3^2}{2g}$$

Redes de tuberías

Son sistemas muy complejos y se hace uso de soluciones iterativas en donde se balancean los circuitos elementales hasta satisfacer todas las condiciones del flujo.

En una red de tuberías deben satisfacerse las siguientes condiciones:

1. La suma algebraica de las caídas de presión en cada circuito debe ser cero.
2. El flujo que entra a una unión debe ser igual al que sale.
3. Debe satisfacerse la ecuación de Darcy-Weisbach en cada tubería, o bien, una fórmula exponencial de fricción equivalente a esta ecuación.



Las fórmulas industriales para la fricción en tuberías son empíricas:

$$h_f = rG^n$$
$$r = \frac{RL}{D^m}$$

Donde R representa la resistencia del ducto ante el flujo y es únicamente función de la rugosidad de la tubería. Este tipo de ecuación es conocida como fórmula de Hazen-Williams.

Para agua:

$$R = \begin{cases} \frac{4.727}{C^n} & \text{unidades USC} \\ \frac{10.675}{C^n} & \text{unidades SI} \end{cases}$$

Con $n=1.852$, $m=4.8704$ y C depende de la rugosidad.

Si se elige usar la ecuación de Darcy-Weisbach, $n=2$ y

$$r = \frac{8fL}{g\pi^2 D^5}$$

C	Condición
140	Tuberías rectas lisas; asbesto, cemento
130	Tuberías muy lisas; concreto, hierro forjado nuevo
120	Madera ensamblada, acero soldado nuevo
110	Arcilla vitrificada, acero remachado nuevo, hierro colado promedio
100	Hierro forjado con varios años de uso
95	Acero remachado con varios años
60-80	Tuberías antiguas, malas condiciones

Se pueden desarrollar fórmulas propias usando el modelo de Darcy-Weisbach o por datos experimentales. Sin embargo, se debe tener precaución al extrapolar o aplicar datos en situaciones diferentes a las que originaron los datos.

Las pérdidas calculadas suelen ser muy diferentes entre ambos tipos de ecuaciones.

No es conveniente resolver las redes en forma analítica y se prefieren los métodos de aproximaciones sucesivas. En el método de Hardy-Cross es preferible usar ecuaciones del tipo Hazen-Williams.

El término de corrección es:

$$G = G_0 + \Delta G$$

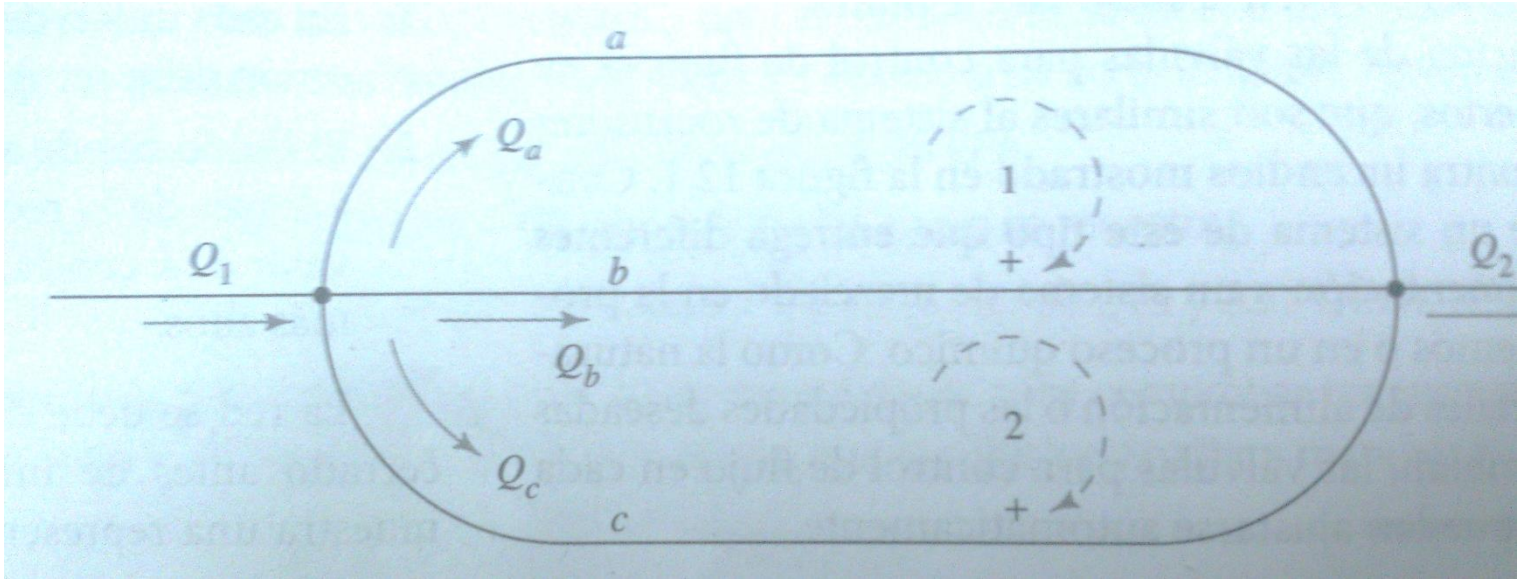
Para cada tubería se calculan las pérdidas

$$h_f = rG^n = r(G_0 + \Delta G)^n$$

Para cada circuito

$$\sum h_f = \sum rG|G|^{n-1} = 0$$
$$\Delta G = -\frac{\sum rG_0|G_0|^{n-1}}{\sum rn|G_0|^{n-1}} = -\frac{\sum h_f}{\sum(2r|G|)}$$

Al aplicar ΔG a cada tubería de un circuito, se toma en cuenta la dirección: los flujos se suman cuando están en dirección horaria y se restan cuando van en dirección contraria. Es decir: ***Si en una tubería dada de un circuito, el flujo es en sentido horario, G y h son positivos. Si el flujo es en sentido antihorario, G y h son negativos.***



Procedimiento

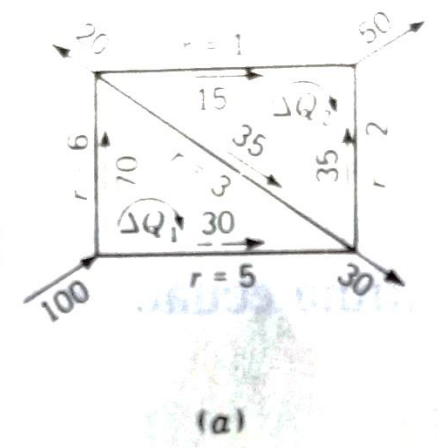
1. Suponga una distribución inicial de flujos que satisfaga la ecuación de continuidad.
2. Divida la red en una serie de circuitos de lazo cerrado.
3. Para cada tubería en un circuito elemental, calcule y sume la pérdida neta de carga $\sum h_f = \sum rG^n$. Calcule también $\sum rn / G^{n-1}$ para el mismo circuito. Calcule la corrección.
4. Analice otro circuito elemental y repita el proceso de corrección del paso 2. Haga esto para todos los circuitos elementales.
5. Para cada tubería, calcule el nuevo $G' = G + \Delta G$
6. Repita los pasos 3 al 5 las veces necesarias hasta que las correcciones ΔG sean pequeñas.

Observación: las tuberías que son comunes a varios circuitos elementales, deben recalcular su flujo **antes** de ser tomadas en cuenta en otro circuito.

Se presenta una red de tuberías con los flujos de entrada y salida mostrados. Calcule la distribución de flujos si $n=2$ y los factores r de cada tubería se dan en el diagrama.

$$\begin{array}{r}
 70^2 \times 6 = 29,400 \\
 35^2 \times 3 = 3,675 \\
 -30^2 \times 5 = -4,500 \\
 \hline
 28,575
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 2 \times 70 \times 6 = 840 \\
 2 \times 35 \times 3 = 210 \\
 2 \times 30 \times 5 = 300 \\
 \hline
 1,350
 \end{array}$$

$$\Delta Q_1 = -\frac{28,575}{1,350} = -21.17$$

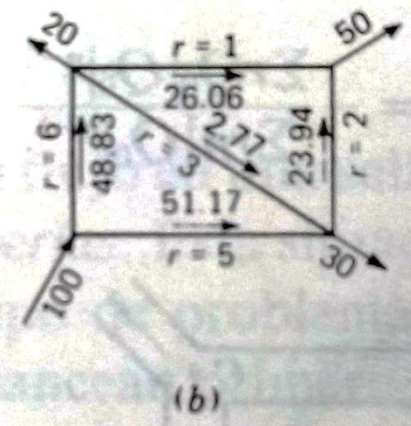


$$\begin{array}{r}
 15^2 \times 1 = 225 \\
 -35^2 \times 2 = -2,450 \\
 -13.83^2 \times 3 = -574 \\
 \hline
 -2,799
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 2 \times 15 \times 1 = 30 \\
 2 \times 35 \times 2 = 140 \\
 2 \times 13.83 \times 3 = 83 \\
 \hline
 253
 \end{array}$$

$$\Delta Q_2 = \frac{2,799}{253} = 11.06$$

$$\begin{array}{r}
 48.83^2 \times 6 = 14,308 \\
 2.77^2 \times 3 = 23 \\
 -51.17^2 \times 5 = -13,090 \\
 \hline
 1,241
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 2 \times 48.83 \times 6 = 586 \\
 2 \times 2.77 \times 3 = 17 \\
 2 \times 51.17 \times 5 = 511 \\
 \hline
 1,114
 \end{array}$$

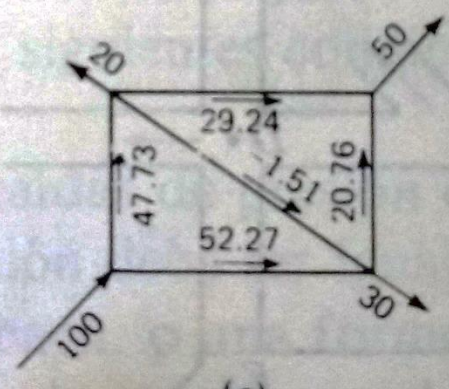
$$\Delta Q_1 = -\frac{1,241}{1,114} = -1.114$$



$$\begin{array}{r}
 26.06^2 \times 1 = 679 \\
 -23.94^2 \times 2 = -1,146 \\
 -1.656^2 \times 3 = -8 \\
 \hline
 -475
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 2 \times 26.06 \times 1 = 52 \\
 2 \times 23.94 \times 2 = 96 \\
 2 \times 1.656 \times 3 = 10 \\
 \hline
 158
 \end{array}$$

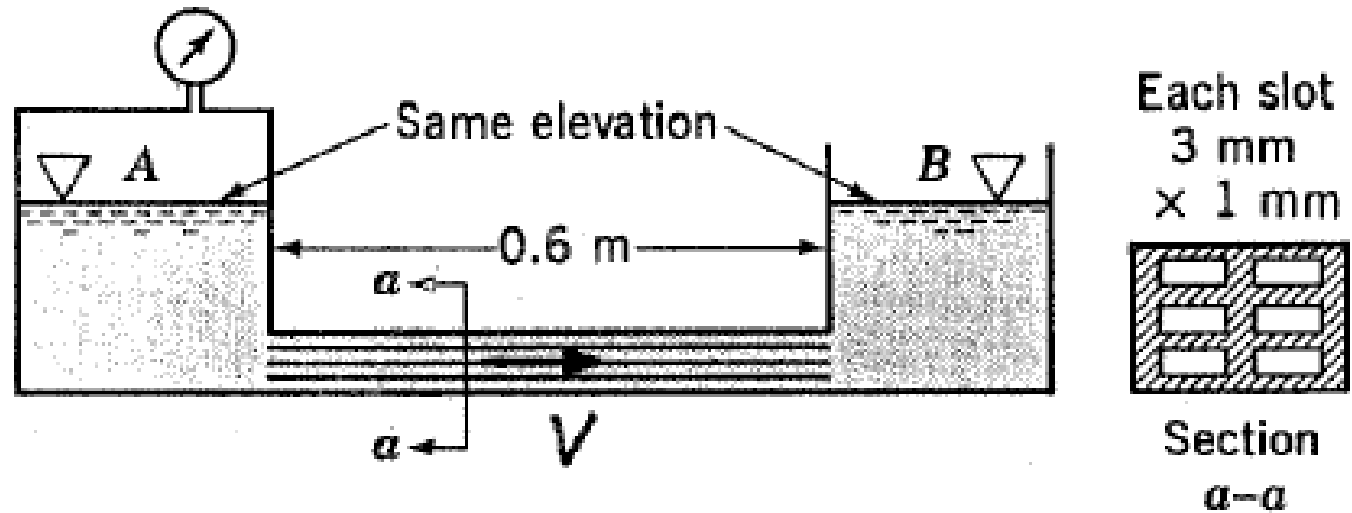
$$\Delta Q_2 = \frac{475}{158} = 3.006$$

$$\Delta Q_1 = 0.0079 \\
 \Delta Q_1 = 0.0013$$

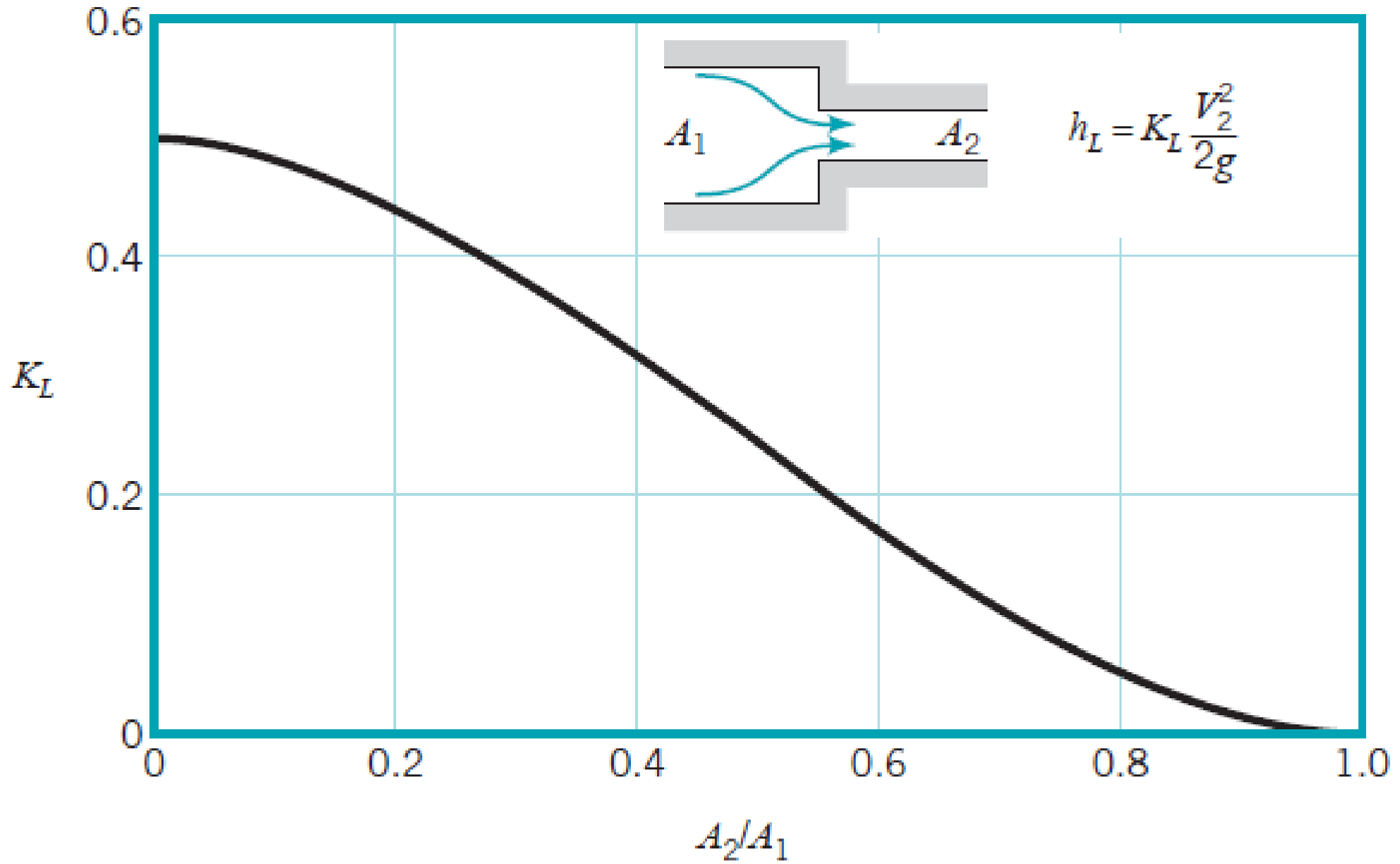


$$\Delta Q_2 = 0.169 \\
 \Delta Q_2 = 0.0003$$

Un aceite viscoso con $SG=0.85$ y viscosidad de $0.1 \text{ Pa}\cdot\text{s}$ fluye desde un tanque A a un tanque B a través de 6 ductos rectangulares. Si el flujo total es de $30 \text{ mm}^3/\text{s}$ y se desprecian las pérdidas menores, calcule la presión en el tanque A.

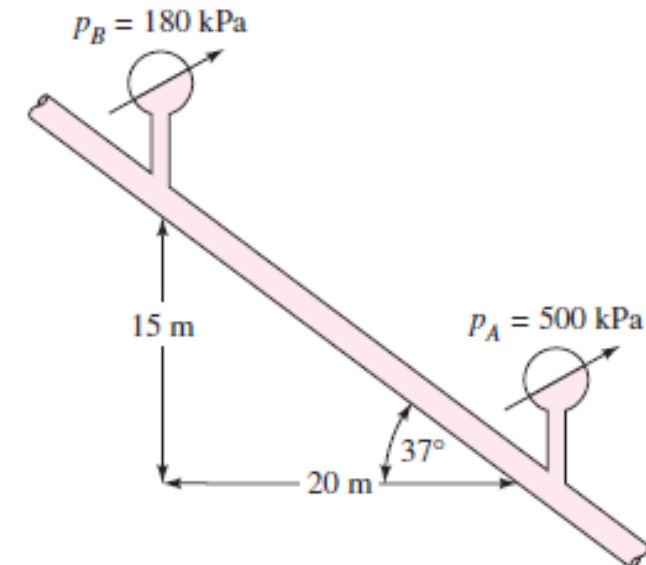


Fluye agua a una velocidad de $0.04 \text{ m}^3/\text{s}$ en una tubería de 0.12 m de diámetro que tiene una contracción súbita a una tubería de 0.06 m de diámetro. Determine la caída de presión a través de la sección de contracción. ¿Qué proporción de esta caída de presión se debe a pérdidas y cuánto a cambios de energía cinética?



Water at 20°C flows upward at 4 m/s in a 6-cm-diameter pipe. The pipe length between points 1 and 2 is 5 m, and point 2 is 3 m higher. A mercury manometer, connected between 1 and 2, has a reading $h = 135$ mm, with p_1 higher. (a) What is the pressure change ($p_1 - p_2$)? (b) What is the head loss, in meters? (c) Is the manometer reading proportional to head loss? Explain. (d) What is the friction factor of the flow?

SAE 30 oil at 20°C flows in the 3-cm-diameter pipe in the fig, which slopes at 37°. For the pressure measurements shown, determine (a) whether the flow is up or down and (b) the flow rate in m³/h.



In the fig. there are 125 ft of 2-in pipe, 75 ft of 6-in pipe, and 150 ft of 3-in pipe, all cast iron. There are three 90° elbows and an open globe valve, all flanged. If the exit elevation is zero, what horsepower is extracted by the turbine when the flow rate is $0.16 \text{ ft}^3/\text{s}$ of water at 20°C ?

