

MECÁNICA DE FLUIDOS

Dr. Jorge Ibarra Rodríguez

Unidad 1. Introducción y Análisis Dimensional

Operaciones Unitarias

Se puede definir la ingeniería química como “la aplicación de los principios de las ciencias físicas, junto con los de economía y relaciones humanas, a campos aplicables en los procesos y equipos de proceso en los que se trata la materia con el fin de modificar su estado, contenido de energía o composición”.

Equilibrio

Podría definirse como es el estado en el cual el intercambio neto de propiedades es igual a cero.

Fuerza Motriz

Es la diferencia que existe entre la condición actual y la condición de equilibrio de un sistema y que impulsa al cambio de estado.

Separaciones

Es la transferencia preferencial de un constituyente a una segunda fase por medios físicos.

Patrones de flujo

Es la forma de poner en contacto diferentes corrientes de fluidos para variar el tiempo de contacto y dinámica del proceso.

Clases de Operaciones

Las operaciones continuas usualmente son económicas en el proceso, pero no siempre son posibles. Cuando se realizan paros constantes en la productividad, el proceso es de tipo intermitente.

Cuando la operación varía con el tiempo se conoce como ***transitoria*** o en ***estado inestable***.

Operaciones Unitarias

Son las etapas físicas individuales que constituyen a un proceso. Estas etapas físicas se caracterizan por tener fundamentos idénticos entre sí sin importar el material procesado.

Ejemplos: Flujo de fluidos, transferencia de calor, destilación, humidificación, absorción de gases, sedimentación, clasificación, agitación, centrifugación, etc.



Operaciones transientes que dependen de la velocidad

La transferencia de un gran número de propiedades sigue la misma expresión matemática de velocidad de transferencia.

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial \theta} = \delta \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x^2}$$

Γ = Propiedad que se transfiere

θ = Tiempo

x = Distancia en la dirección de transporte

δ = Constante de proporcionalidad

$$VT = \frac{FC}{R}$$

Mecánica de Fluidos

Es la parte de la física que se encarga de estudiar y describir el flujo de los fluidos a través de diferentes configuraciones, así como el equipo necesario para efectuar este proceso.

Dimensiones y unidades

Dimensión o cantidad	Unidad y abreviatura (SI)	Unidad y abreviatura (Inglés)
Longitud (L)	Metro, m	Pie, ft
Tiempo (T)	Segundo, s	Hora, h
Masa (M)	Kilogramo, kg	Libra, lb
Corriente eléctrica (I)	Ampere, A	
Temperatura (θ)	Kelvin, K	Rankin, R
Cantidad de sustancia (μ)	Mol, mol	
Intensidad luminosa (Iv)	Candela, cd	
Fuerza (F)	Newton, N	Libra fuerza, lb
Energía Térmica (H)	Joule, J	Unidad térmica inglesa, Btu

EL MÉTODO DE BUCKINGHAM (π , pi)

- Útil cuando no existe posibilidad de obtener una ecuación diferencial relativamente sencilla.
- Se requiere conocer y enlistar las variables significativas ligadas al fenómeno.
- Determinar el número de parámetros adimensionales en los que se pueden agrupar las variables. Se utiliza el teorema π (PI) DE BUCKINGHAM.

Teorema

- El número de grupos sin dimensión que se utilizan para describir una situación dada que involucre a n variables es igual a $n-r$, donde r es el rango de la matriz dimensional de las variables.

Por lo que:

$$i = n - r$$

Donde:

i : número de grupos independientes
(adimensionales)

n : número de variables implicadas.

r : rango de matriz dimensional.

- La matriz dimensional es la matriz formada por tabulación de los exponentes de las dimensiones fundamentales M, L, t; que aparecen en cada variable involucrada.

Ejemplo:

- Un fluido incompresible fluye en el interior de un tubo circular de diámetro D . Las variables significativas son: la caída de presión Δp , la velocidad v , el diámetro D , la longitud L (del tubo), la viscosidad μ , y la densidad ρ . **El número total de variables es 6. Las unidades fundamentales o dimensiones son 3:** masa M , longitud L y el tiempo t . Las unidades de las variables son:

Variables	Unidades
Δp	M / Lt^2
v	L / t
D	L
L	L
μ	M / Lt
ρ	M / L^3

El número de grupos adimensionales es $i = n - r$

$$6 - 3 = 3$$

La matriz sujeto se forma estableciendo las unidades fundamentales como los renglones y como columnas aparecen las variables sujeto de interés. Por ejemplo en el caso anterior:

	Δp	v	D	L	μ	ρ
M	1	0	0	0	1	1
L	-1	1	0	0	-1	-3
t	-2	-1	1	1	-1	0

Los grupos π adimensionales se forman tomando r variables y combinándolas con las restantes individualmente. Se elevan a las potencias adecuadas para hacerlos adimensionales.

- Por lo tanto

$$\pi_1 = f(\pi_2, \pi_3)$$

- Ahora se selecciona un grupo de 3 variables que aparezcan en C / π y que **entre ellas contengan todas las dimensiones fundamentales**. Dos variables dentro de las principales no pueden contener las mismas dimensiones.
- La(s) variable(s) cuyo efecto se desea analizar se “aíslan”. En este caso aislamos Δp . Las variables principales pueden ser v , D , μ , ρ . (L y D no, por tener mismas dimensiones).

$$\pi_1 = D^a v^b \rho^c \Delta p^1$$

$$\pi_2 = D^d v^e \rho^f L^1$$

$$\pi_3 = D^g v^h \rho^i \mu^1$$

- Para que los grupos π sean adimensionales a, b, c, ...
 - Deben tener ciertos valores.

$$\pi_1 = D^a v^b \rho^c \Delta p^1$$

$$(L) \quad 0 = a + b - 3c - 1$$

$$(M) \quad 0 = c + 1 \quad \pi_1 = \Delta p / v^2 \rho$$

$$(t) \quad 0 = -b - 2$$

Resolviendo para cada letra.

$$a = 0, b = -2, c = -1$$

Lo mismo para π_2 y π_3

$$\pi_1 = \Delta p / v^2 \rho \quad \pi_2 = L/D \quad \pi_3 = \left(\frac{Dv\rho}{\mu} \right)^{-1} = (N_{Re})^{-1}$$

$$\frac{\Delta p}{v^2 \rho} = f \left(\frac{L}{D}, \frac{\mu}{Dv\rho} \right)$$

Metodología de resolución

- El estudiante entiende lo que se solicita en el problema.
- Ordena la información necesaria para resolver el problema (Datos).
- Enumera las ecuaciones necesarias en las que se aplica la información.
- Si es necesario, hacer un esquema del problema. Aplicar las ecuaciones.
- En ocasiones, será necesario hacer suposiciones; debe cuidarse que sean válidas y razonables.
- Agregar un comentario para ayudar al entendimiento de la solución nunca está de sobra.

Un líquido fluye por un orificio en el lado de un tanque. Una ecuación común para encontrar el flujo en estos casos es

$$Q = 0.61A\sqrt{2gh}$$

Donde A es el área del orificio, g es la aceleración de la gravedad y h es la altura del líquido sobre la superficie. Investigar la homogeneidad dimensional de esta fórmula.



Sistemas de Unidades

Sistema Internacional

Se adoptó en 1960 como el estándar internacional. La unidad de longitud es el metro m, para el tiempo es el segundo s, para la masa es el kilogramo kg y para la temperatura es el Kelvin K.

La gravedad es de 9.807 kg/m^2 . La unidad de trabajo es el Joule J. La unidad de potencia es el Watt W.

Prefixes for SI Units

Factor by Which Unit Is Multiplied	Prefix	Symbol	Factor by Which Unit Is Multiplied	Prefix	Symbol
10^{15}	peta	P	10^{-2}	centi	c
10^{12}	tera	T	10^{-3}	milli	m
10^9	giga	G	10^{-6}	micro	μ
10^6	mega	M	10^{-9}	nano	n
10^3	kilo	k	10^{-12}	pico	p
10^2	hecto	h	10^{-15}	femto	f
10	deka	da	10^{-18}	atto	a
10^{-1}	deci	d			

Sistema Británico gravitacional

La unidad de longitud es el pie ft, de tiempo es el segundo s, para la fuerza es la libra lb, y para la temperatura es el grado fahrenheit °F o de temperatura absoluta es el grado Rankine °R. Aquí la unidad de masa se conoce como slug a partir de la segunda ley de Newton.

El peso tiene unidades de lb. La gravedad tiene un valor de 32.174 ft/s^2 , por lo que una masa de 1 slug pesa 32.2 lb bajo la acción de la gravedad.

Sistema Inglés de ingeniería

Se definen de manera independiente la masa y la fuerza. La unidad de la fuerza es la libra-masa lb_m y la unidad de fuerza es la libra lb . La unidad de longitud es el pie ft , del tiempo es el segundo s y para la temperatura absoluta es el grado Rankine $^{\circ}R$.

Se expresa la segunda ley de Newton de modo que sea homogénea dimensionalmente como:

$$F = \frac{ma}{g_c}$$
$$g_c = \frac{1 \text{ } lb_m \left(32.174 \frac{ft}{s^2} \right)}{1 \text{ } lb_f}$$

Conversion Factors from BG and EE Units to SI Units^a

	To Convert from	to	Multiply by
Acceleration	ft/s ²	m/s ²	3.048 E - 1
Area	ft ²	m ²	9.290 E - 2
Density	lbm/ft ³	kg/m ³	1.602 E + 1
	slugs/ft ³	kg/m ³	5.154 E + 2
Energy	Btu	J	1.055 E + 3
	ft · lb	J	1.356
Force	lb	N	4.448
Length	ft	m	3.048 E - 1
	in.	m	2.540 E - 2
	mile	m	1.609 E + 3
Mass	lbm	kg	4.536 E - 1
	slug	kg	1.459 E + 1
Power	ft · lb/s	W	1.356
	hp	W	7.457 E + 2
Pressure	in. Hg (60 °F)	N/m ²	3.377 E + 3
	lb/ft ² (psf)	N/m ²	4.788 E + 1
	lb/in. ² (psi)	N/m ²	6.895 E + 3
Specific weight	lb/ft ³	N/m ³	1.571 E + 2
Temperature	°F	°C	$T_C = (5/9)(T_F - 32°)$
	°R	K	5.556 E - 1
Velocity	ft/s	m/s	3.048 E - 1
	mi/hr (mph)	m/s	4.470 E - 1
Viscosity (dynamic)	lb · s/ft ²	N · s/m ²	4.788 E + 1
Viscosity (kinematic)	ft ² /s	m ² /s	9.290 E - 2
Volume flowrate	ft ³ /s	m ³ /s	2.832 E - 2
	gal/min (gpm)	m ³ /s	6.309 E - 5

Conversion Factors from SI Units to BG and EE Units^a

	To Convert from	to	Multiply by
Acceleration	m/s ²	ft/s ²	3.281
Area	m ²	ft ²	1.076 E + 1
Density	kg/m ³	lbm/ft ³	6.243 E - 2
Energy	kg/m ³	slugs/ft ³	1.940 E - 3
	J	Btu	9.478 E - 4
	J	ft · lb	7.376 E - 1
Force	N	lb	2.248 E - 1
Length	m	ft	3.281
	m	in.	3.937 E + 1
Mass	m	mile	6.214 E - 4
	kg	lbm	2.205
	kg	slug	6.852 E - 2
Power	W	ft · lb/s	7.376 E - 1
	W	hp	1.341 E - 3
Pressure	N/m ²	in. Hg (60 °F)	2.961 E - 4
	N/m ²	lb/ft ² (psf)	2.089 E - 2
	N/m ²	lb/in. ² (psi)	1.450 E - 4
Specific weight	N/m ³	lb/ft ³	6.366 E - 3
Temperature	°C	°F	$T_F = 1.8 T_C + 32^\circ$
	K	°R	1.800
Velocity	m/s	ft/s	3.281
	m/s	mi/hr (mph)	2.237
Viscosity (dynamic)	N · s/m ²	lb · s/ft ²	2.089 E - 2
Viscosity (kinematic)	m ² /s	ft ² /s	1.076 E + 1
Volume flowrate	m ³ /s	ft ³ /s	3.531 E + 1
	m ³ /s	gal/min (gpm)	1.585 E + 4

Un tanque de líquido que tiene una masa total de 36 kg está en reposo dentro de un transbordador espacial. Determine la fuerza en N que el tanque ejerce en su base poco después de haber despegado y cuando el transbordador tiene una aceleración de 15 ft/s^2 hacia arriba.

Existen unidades empíricas aún muy empleadas, sobre todo en el sistema inglés.

1 hp=550 ft lbf/s

1 Btu/lb°F = 1 cal/g°C

Las ecuaciones derivadas de las leyes básicas de las ciencias físicas constan de términos que pueden expresarse en las mismas unidades usando las definiciones de magnitudes derivadas; es decir, que todas las unidades derivadas pueden reducirse a cinco unidades básicas (de masa, longitud, tiempo, temperatura y mol). Este tipo de ecuaciones se conocen como ***dimensionalmente homogéneas***.

Cuando se emplean tales ecuaciones respetando las unidades para las unidades base, se les llama ***de unidades consistentes***. En estos casos no se necesitan factores de conversión.

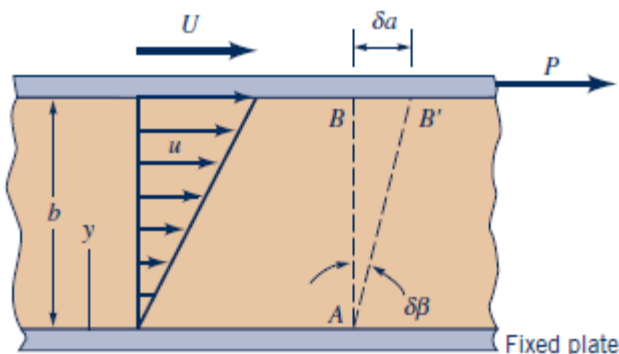
Algunas propiedades importantes

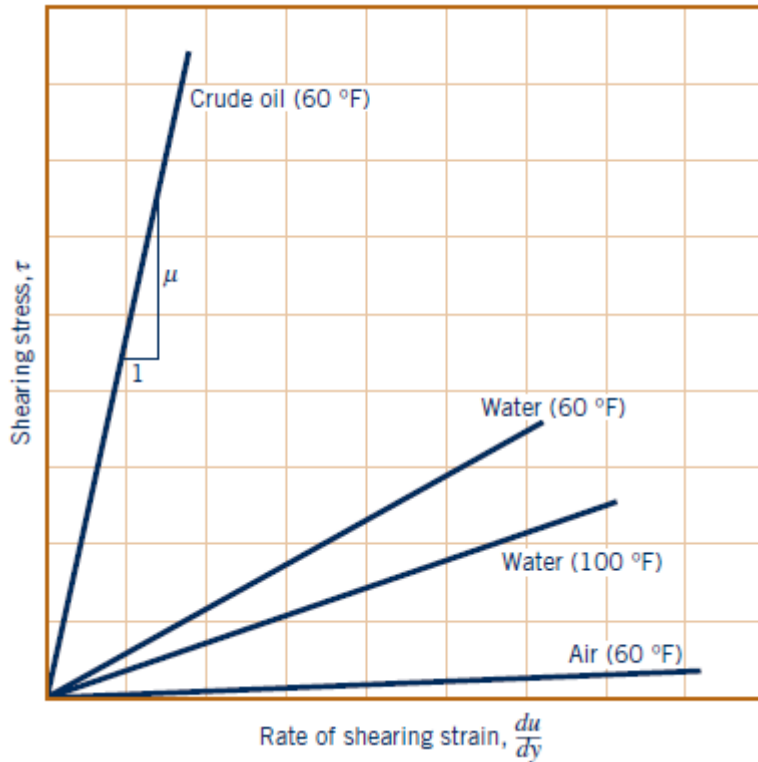
Densidad: slug/ft³, kg/m³. (relacionada con el volumen específico).

Peso específico: $\gamma = \rho g$, se define como peso por unidad de volumen.

Gravedad específica: Es la relación de la densidad de un fluido con respecto a la del agua.

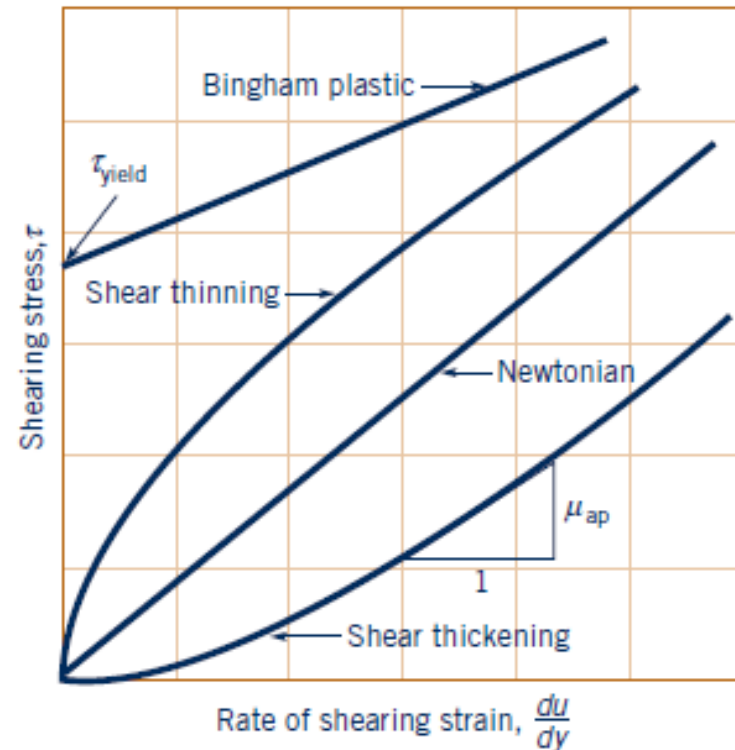
Viscosidad: Describe la facilidad de un fluido a deformarse o fluir. (lb_f·s/ft², N·s/m²)





$$\tau = \mu \frac{du}{dy}$$

Estos fluidos se conocen como newtonianos, en los que la viscosidad es constante y se describe por la pendiente lineal de la gráfica. Cuando no se sigue esta relación lineal, el fluido se conoce como no newtoniano.



El esfuerzo cortante τ es la fuerza requerida para deslizar una capa de área unitaria de una sustancia sobre otra.

$$\tau = \frac{F}{A} [=] \frac{N}{m^2}$$

En fluidos como el agua, aceite, alcohol y otros líquidos comunes, la magnitud del esfuerzo cortante es directamente proporcional al cambio de velocidad entre diferentes posiciones en el fluido.

El gradiente de velocidad es una medida del cambio de velocidad y se define como $\Delta v/\Delta y$ y equivale a la *tasa de cambio del esfuerzo cortante con respecto a la posición y*.

$$\tau = \eta \left(\frac{\Delta v}{\Delta y} \right) \qquad \mu = \eta$$

μ es la viscosidad dinámica o absoluta.

TABLA 2.1 Unidades de viscosidad dinámica, η (letra griega eta)

Sistema de unidades	Unidades de viscosidad dinámica (η)
Sistema Internacional (SI)	N·s/m ² , Pa·s o kg/(m·s)
Sistema de uso común en Estados Unidos	lb·s/ft ² o slug/(ft·s)
Sistema cgs (obsoleto)	poise = dinas·s/cm ² = g/(cm·s) = 0.1 Pa·s centipoise = poise/100 = 0.001 Pa·s = 1.0 mPa·s

La viscosidad cinemática η se obtiene a partir de la ecuación anterior, $\eta = \frac{\tau}{\Delta v / \Delta y}$, en unidades N s/m², o directamente Pa s. Puede representarse de manera equivalente en unidades kg/(m s).

En la mecánica de fluidos se usa ampliamente la relación de viscosidad dinámica con la densidad, conocida como viscosidad cinemática $\nu = \mu / \rho$.

Las unidades para la viscosidad cinemática son m²/s.

TABLA 2.2 Unidades para la viscosidad cinemática, ν (letra griega nu)

Sistema de unidades	Unidades de la viscosidad cinemática (ν)
Sistema Internacional (SI)	m ² /s
Sistema de uso común en Estados Unidos	ft ² /s
Sistema cgs (obsoleto)	stoke = cm ² /s = 1×10^{-4} m ² /s centistoke = stoke/100 = 1×10^{-6} m ² /s = 1 mm ² /s

Fluidos independientes del tiempo:

- Seudoplástico. Estos fluidos empiezan con una alta viscosidad aparente y después la pendiente disminuye con el gradiente de velocidad. Ejemplos: plasma sanguíneo, polietileno fundido, látex, jarabes, adhesivos, melazas, tintas.
- Dilatantes. Estos fluidos empiezan con una baja viscosidad aparente que después aumenta con el aumento del gradiente de velocidad. Ejemplos: mezclas de altas concentraciones de sólidos como almidón de maíz en etilenglicol, almidón en agua, dióxido de titanio.
- Plásticos Bingham. Requieren de un importante aumento del esfuerzo cortante para iniciar el flujo, después de lo cual muestran una viscosidad aparente de tipo lineal. Ejemplos: chocolate, salsa de tomate, mostaza, mayonesa, pasta de dientes, pintura, asfalto, ciertas grasas y suspensiones de cenizas o lodos de drenaje.

Fluidos dependientes del tiempo.

Son difíciles de analizar debido al cambio de la viscosidad con el tiempo. Algunos ejemplos son algunos crudos a bajas temperaturas, la tinta de impresoras, nylon líquido, ciertos polímeros, gelatinas, la masa de harina, algunas grasas y pinturas.

VISCOSIDAD DE POLÍMEROS

Se miden cinco factores de viscosidad

- Viscosidad relativa. Relación de viscosidades de una solución polimérica y de un solvente puro a la misma temperatura.
- Viscosidad inherente. Relación del logaritmo natural de la anterior con la concentración.
- Viscosidad reducida. La viscosidad específica dividida entre la concentración.
- Viscosidad específica. La viscosidad relativa de la solución polimérica menos 1.
- Viscosidad intrínseca. La viscosidad específica sobre la concentración y extrapolada a concentración cero. Es una medida del peso molecular del polímero.

ÍNDICE DE VISCOSIDAD

Este índice proporciona una medida de la variación de la viscosidad con la temperatura. Un alto índice de viscosidad indica un cambio pequeño de la viscosidad con la temperatura. Un bajo índice de viscosidad indica una variación grande de la viscosidad con la temperatura.

Estática de Fluidos

La estática de fluidos es un tema especial de fluidos en los que la energía cinética y el término de pérdidas por fricción son cero.

La estática de fluidos establece las ecuaciones que sigue un fluido en reposo o que se mueve de manera que no hay movimiento relativo entre partículas adyacentes; por tanto, en estos casos no existe esfuerzo cortante en el fluido. Esto significa que las únicas fuerzas desarrolladas en las superficies de las partículas serán debidas a la presión.

La presión de referencia es la atmosférica, por lo que la presión medida se conoce como manométrica. Cuando la presión medida se hace en referencia con el vacío perfecto se conoce como presión absoluta.

$$p_{\text{abs}} = p_{\text{man}} + p_{\text{atm}}$$

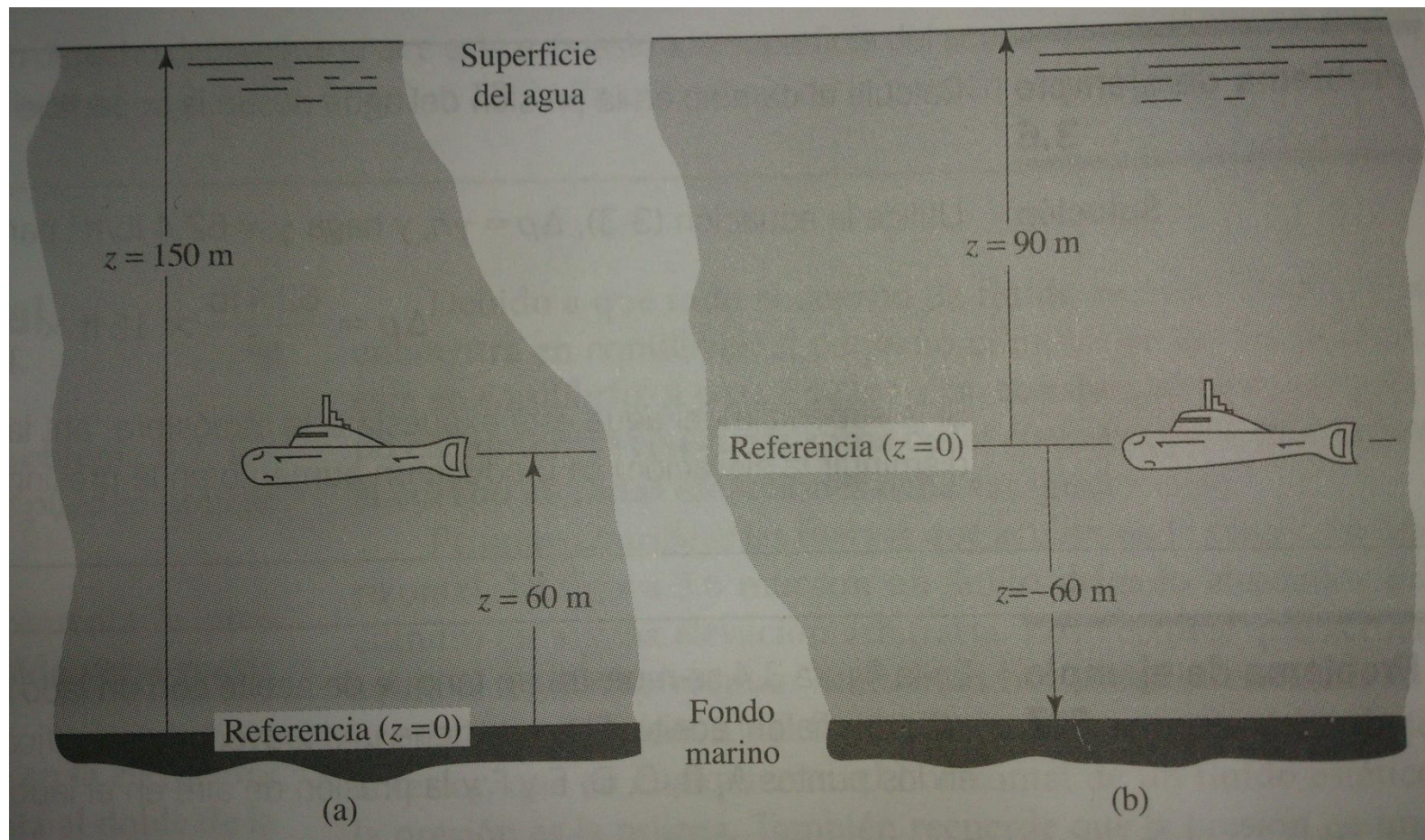
- Un vacío perfecto es la presión más baja posible. Una presión absoluta siempre será positiva.
- Una presión manométrica superior a la atmosférica es positiva.
- Una presión manométrica inferior a la atmosférica es negativa y se menciona como “vacío”.
- La presión manométrica se indica en unidades de Pa(man), psi(gage) o psig.
- La presión absoluta en Pa(abs), psi(abs) o psia.
- La presión atmosférica varía con ubicación y condiciones.

- El rango de variación de la presión atmosférica cerca de la superficie está entre 95 hasta 105 kPa(abs) o 13.8 a 15.3 psia.
- Al nivel del mar la presión atmosférica estándar es de 101.3 kPa(abs) o 14.69 psia.

Expresé una presión de 155 kPa(man) como presión absoluta. La presión atmosférica local es de 98 kPa(abs).

Expresé una presión de 225 kPa(abs) como presión manométrica.

Expresé una presión de -6.2 psig como presión absoluta.



Un balance de fuerzas en un manómetro produce

$$\Delta p = \rho g \Delta z$$

La ecuación derivada aplicable a todos los manómetros es

$$p_1 - p_2 = (\rho_m - \rho_A) g \Delta z$$

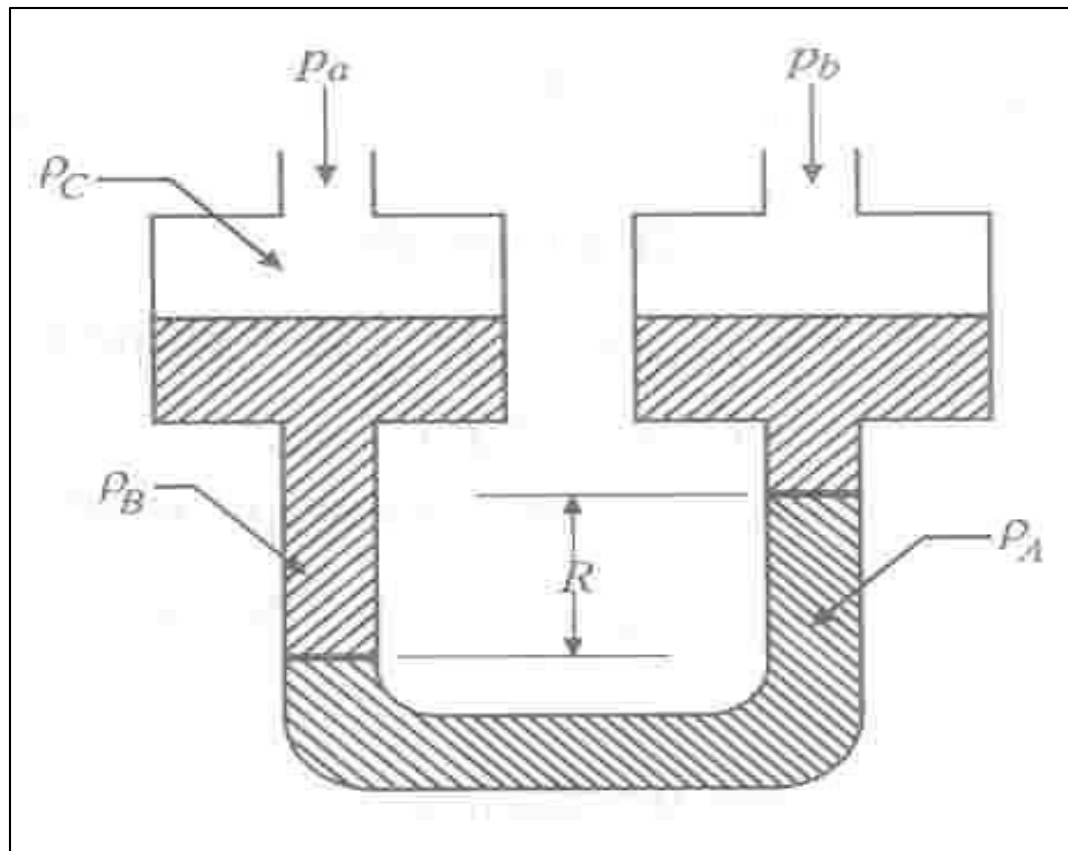
Calcule el cambio de la presión del agua desde la superficie hasta una profundidad de 5 m.

Calcule el cambio en la presión del agua desde la superficie hasta una profundidad de 15 ft.

- La ecuación es válida solo para un líquido homogéneo en reposo
 - Los puntos ubicados en el mismo nivel horizontal tienen la misma presión
 - El cambio en la presión es directamente proporcional al peso específico del líquido
 - La presión varía linealmente con el cambio en la elevación
 - Una disminución en la elevación ocasiona un aumento de presión
 - Un aumento en la elevación causa una disminución en la presión
-
- No es aplicable a los gases, debido a que su peso específico ocasiona un cambio de presión

La disminución en la presión de E a F se produce porque el punto F está en una elevación más alta que el punto E. Observe que p_F es negativa; es decir está por debajo de la presión atmosférica que existe en A y E.

Obtener una expresión para el tipo de manómetro mostrado y discutir sus aplicaciones



El volumen en el recipiente debe desplazarse a lo largo del tubo, por tanto

$$\Delta V = \Delta h A = R A_{cil}$$

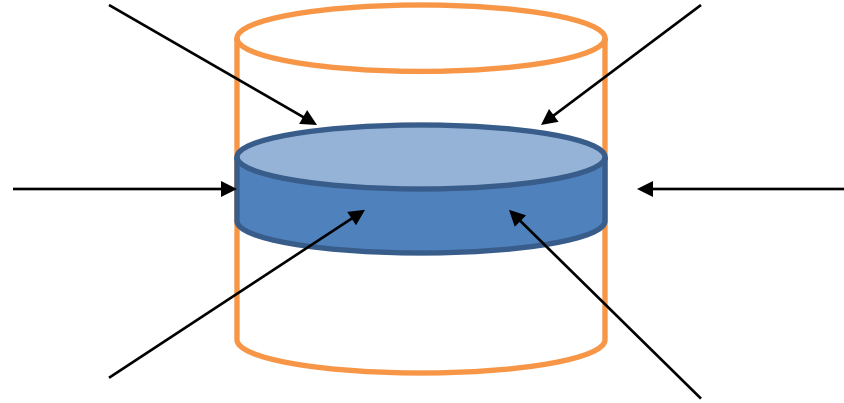
$$\Delta h = R \frac{A_{cil}}{A} = R\alpha$$

$$p_A A_{cil} + \rho_c g \Delta h A + \rho_B g R A_{cil} - \rho_A g R A_{cil} - \rho_B g \Delta h A = p_B A_{cil}$$

$$p_A - p_B = Rg(\rho_A - \rho_B)$$

La altura de un edificio es de 828 m. Estime la relación de la presión en la azotea del edificio con respecto a la de su base, asumiendo que el aire está a una temperatura de 59°F. Asuma que el aire es incompresible con un peso densidad de 0.0756 lb/ft³ a 14.7 psi absolutas.

1. La presión en la base es p_1
2. La presión del fluido en la parte superior es p_2
3. La diferencia de elevación es dz
4. El cambio de presión del fluido entre los extremos es dp , $p_2 = p_1 + dp$
5. El cilindro tiene área A en la base y la tapa



6. El volumen del cilindro es $V = Adz$
7. El peso del fluido dentro del cilindro es $w = \gamma V = \gamma Adz$
8. La fuerza que actúa en la base del cilindro es $F_1 = p_1 A$
9. La fuerza que actúa en la parte superior es $F_2 = p_2 A$ y actúa verticalmente hacia abajo. $F_2 = (p_1 + dp)A$

$$\sum F_z = 0 = F_1 - F_2 - w = p_1 A - (p_1 + dp)A - \gamma dz A$$

$$p_1 - p_1 - dp - \gamma dz = 0$$
$$dp = -\gamma dz$$

Para un gas compresible

$$P = \frac{\rho RT}{M}$$

Siendo M el peso molecular, se tiene que la ecuación $\rho g = \nabla P$ se transforma en

$$\frac{dP}{dy} = -\rho g = -\frac{PMg}{RT}$$

$$\frac{dP}{P} = -\frac{Mg}{RT} dy$$

Las CF son $P=P_{atm}$ en $y=0$, $P=P$ en $y=y$

$$\ln \frac{P}{P_{atm}} = -\frac{Mgy}{RT}$$

$$\frac{P}{P_{atm}} = \exp\left(-\frac{Mgy}{RT}\right) = \exp\left(-\frac{gy}{RT}\right)$$

R es la constante de los gases en unidades convenientes.

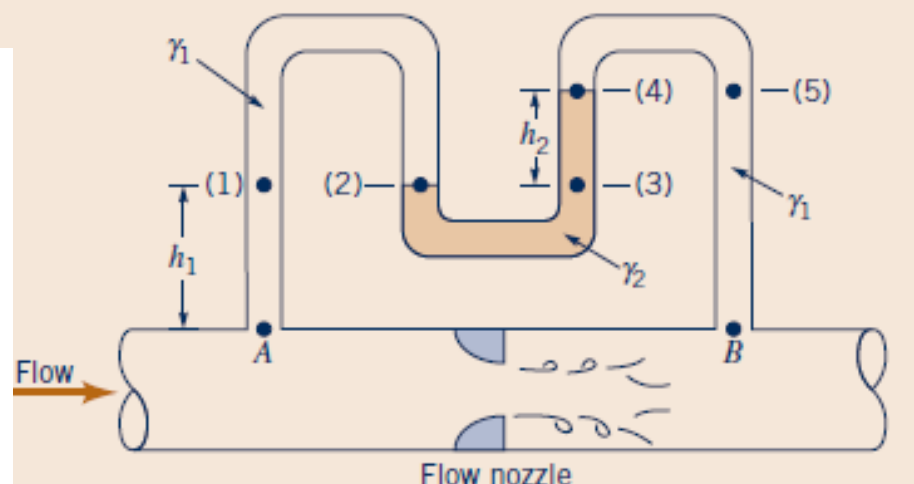
$R=1716 \text{ lb}\cdot\text{ft}/(\text{slug } ^\circ\text{R})$

Manómetros

1. Inicie desde un extremo del manómetro y exprese en forma simbólica la presión indicada allí. Si uno de los extremos está abierto, le corresponde una presión atmosférica.
2. Añada términos que representen los cambios de presión usando $\Delta p = \gamma h$ empezando desde el punto de partida e incluyendo cada fluido.
3. Cuando el movimiento es hacia abajo, la presión aumenta y se suma el valor de Δp . Cuando es hacia arriba la presión disminuye.
4. Continuar con el proceso hasta alcanzar el punto opuesto. Igualar la ecuación a la presión encontrada en el punto final.
5. Resuelva la ecuación en forma algebraica.
6. Introduzca los datos conocidos y calcule la presión deseada.

GIVEN As will be discussed in Chapter 3, the volume rate of flow, Q , through a pipe can be determined by means of a flow nozzle located in the pipe as illustrated in Fig. E2.5a. The nozzle creates a pressure drop, $p_A - p_B$, along the pipe that is related to the flow through the equation $Q = K\sqrt{p_A - p_B}$, where K is a constant depending on the pipe and nozzle size. The pressure drop is frequently measured with a differential U-tube manometer of the type illustrated.

FIND (a) Determine an equation for $p_A - p_B$ in terms of the specific weight of the flowing fluid, γ_1 , the specific weight of the gage fluid, γ_2 , and the various heights indicated. (b) For $\gamma_1 = 9.80 \text{ kN/m}^3$, $\gamma_2 = 15.6 \text{ kN/m}^3$, $h_1 = 1.0 \text{ m}$, and $h_2 = 0.5 \text{ m}$, what is the value of the pressure drop, $p_A - p_B$?

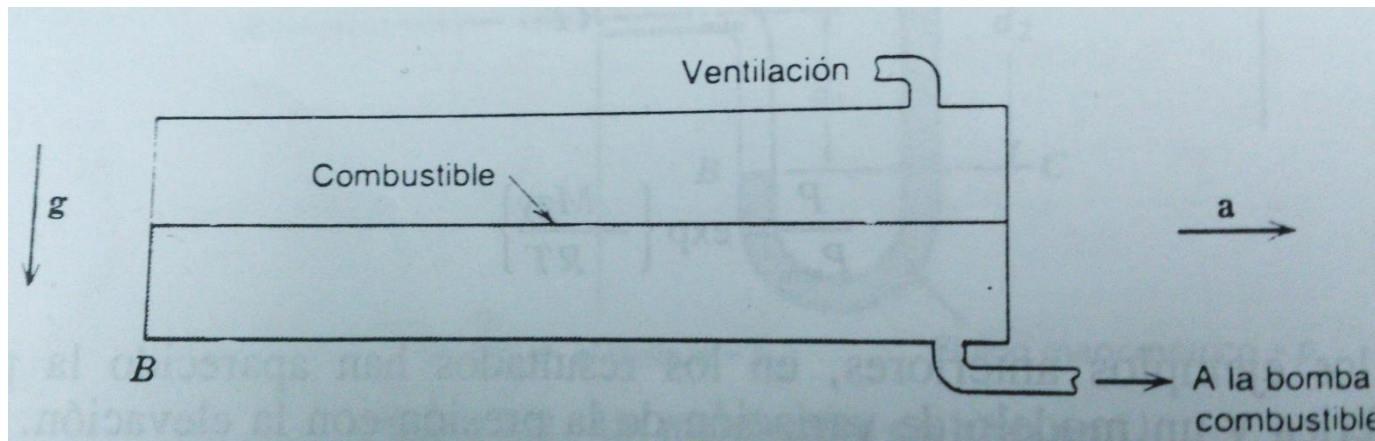


Sistemas con aceleración constante

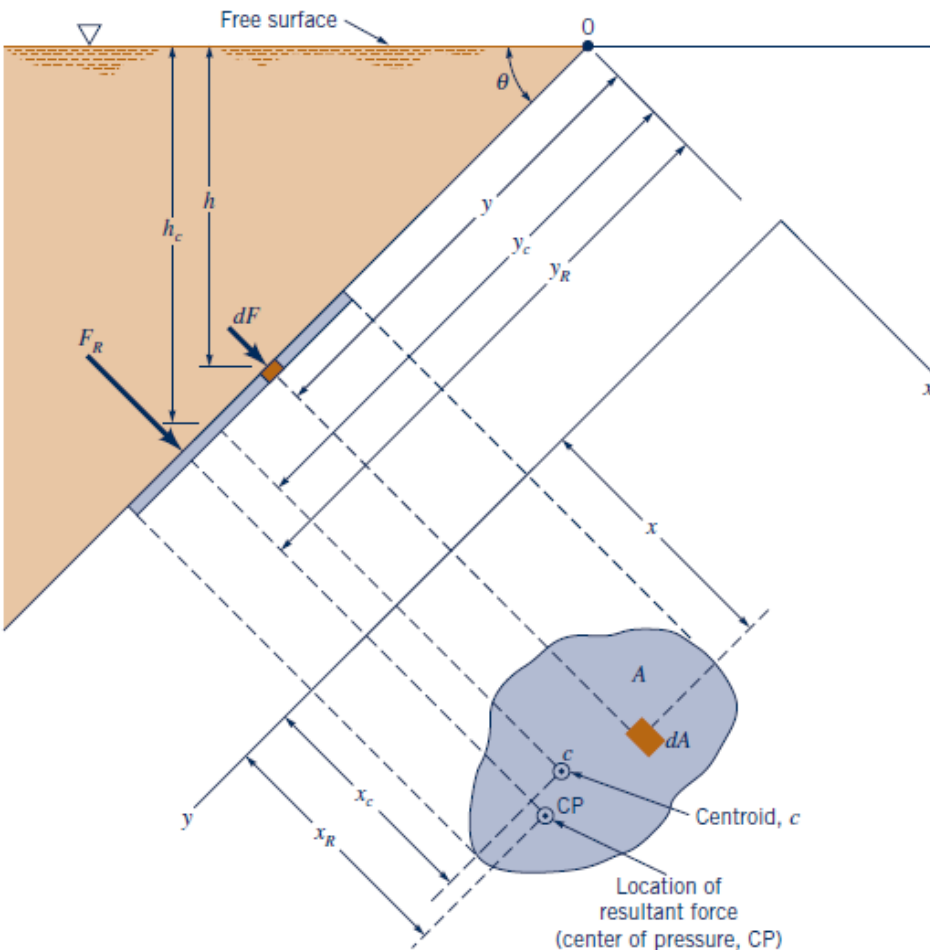
$$\nabla P = \rho(\mathbf{g} - \mathbf{a})$$

La velocidad de cambio máxima de la presión aparece en la dirección $\mathbf{g}-\mathbf{a}$ (vectorial) y las líneas de presión constante son perpendiculares a $\mathbf{g}-\mathbf{a}$.

Se tiene un tanque de combustible con una aceleración uniforme a la derecha. ¿Cuál será la presión en el punto B?



Superficies sumergidas



Ya que la presión varía con la altura del fluido, las fuerzas que actúan en un cuerpo sumergido variarán a lo largo del mismo. Es importante en estos casos calcular la fuerza resultante

La fuerza resultante de un fluido estático en una superficie plana se deberá a la distribución de la presión hidrostática sobre la misma.

La fuerza resultante a cualquier profundidad está dada por

$$dF_R = \rho g h dA$$
$$F_R = \int_A \rho g h dA = \int_A \rho g y \sin \theta dA$$
$$F_R = \rho g \sin \theta \int_A y dA$$

La definición del centroide de un cuerpo (primer momento) es

$$y_c \equiv \frac{1}{A} \int_A y dA$$

Y entonces se puede escribir

$$F_R = \rho g A y_c \sin \theta$$

$$F_R = \rho g A h_c$$

Para encontrar las coordenadas de la fuerza resultante, debe hacerse un balance de momentos sobre el eje x:

$$F_R y_R = \int_A y dF = \int_A \rho g \sin \theta y^2 dA$$
$$y_R = \frac{\int_A y^2 dA}{y_c A}$$

La integral del numerador es el segundo momento del área (momento de inercia) I_x con respecto al eje x.

$$y_R = \frac{I_x}{y_c A}$$

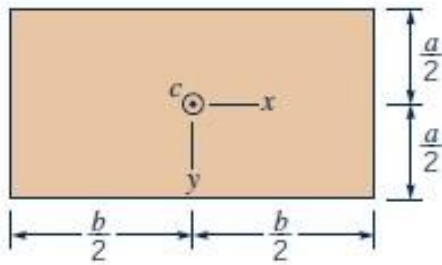
I_x también puede expresarse en términos de

$$I_x = I_{xc} + A y_c^2$$

$$y_R = \frac{I_{xc}}{y_c A} + y_c$$

La coordenada x de la fuerza resultante se encuentra por un análisis similar

$$x_R = \frac{I_{xyc}}{y_c A} + x_c$$



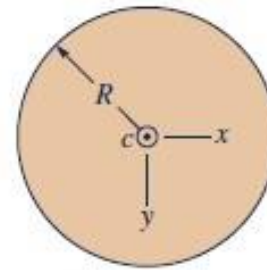
(a) Rectangle

$$A = ba$$

$$I_{xx} = \frac{1}{12} ba^3$$

$$I_{yy} = \frac{1}{12} ab^3$$

$$I_{xy} = 0$$

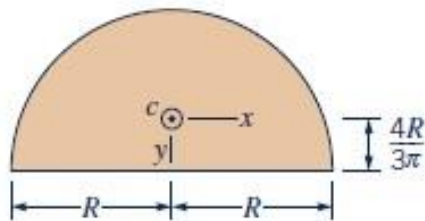


(b) Circle

$$A = \pi R^2$$

$$I_{xx} = I_{yy} = \frac{\pi R^4}{4}$$

$$I_{xy} = 0$$



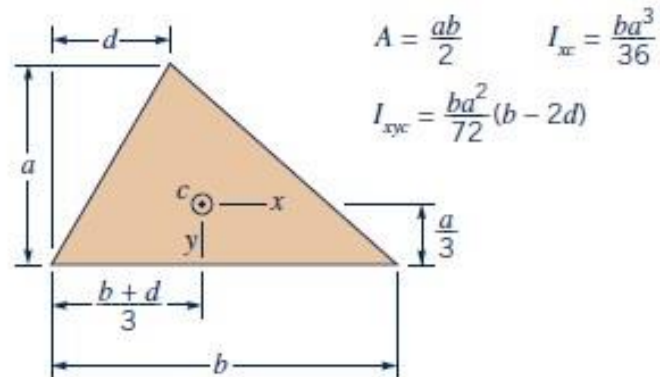
(c) Semicircle

$$A = \frac{\pi R^2}{2}$$

$$I_{xx} = 0.1098R^4$$

$$I_{yy} = 0.3927R^4$$

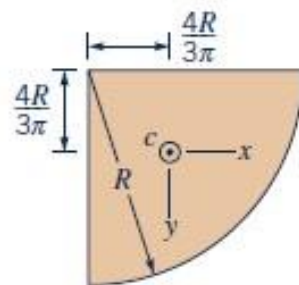
$$I_{xy} = 0$$



(d) Triangle

$$A = \frac{ab}{2} \quad I_{xx} = \frac{ba^3}{36}$$

$$I_{xy} = \frac{ba^2}{72}(b-2d)$$



(e) Quarter circle

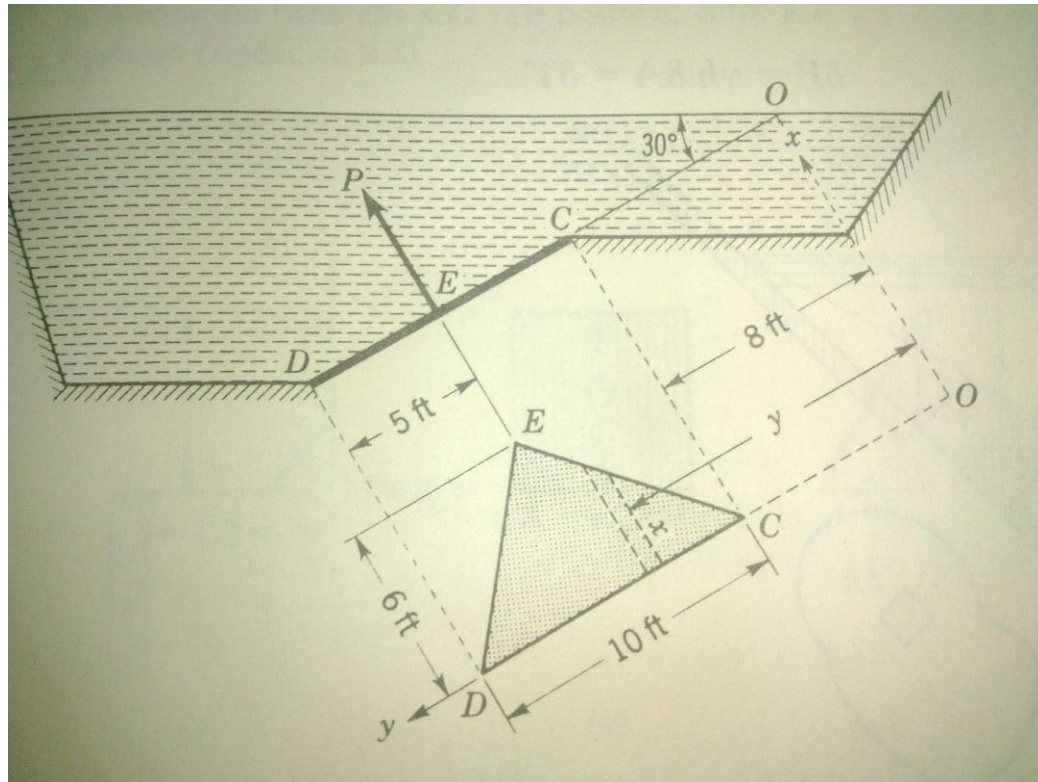
$$A = \frac{\pi R^2}{4}$$

$$I_{xx} = I_{yy} = 0.05488R^4$$

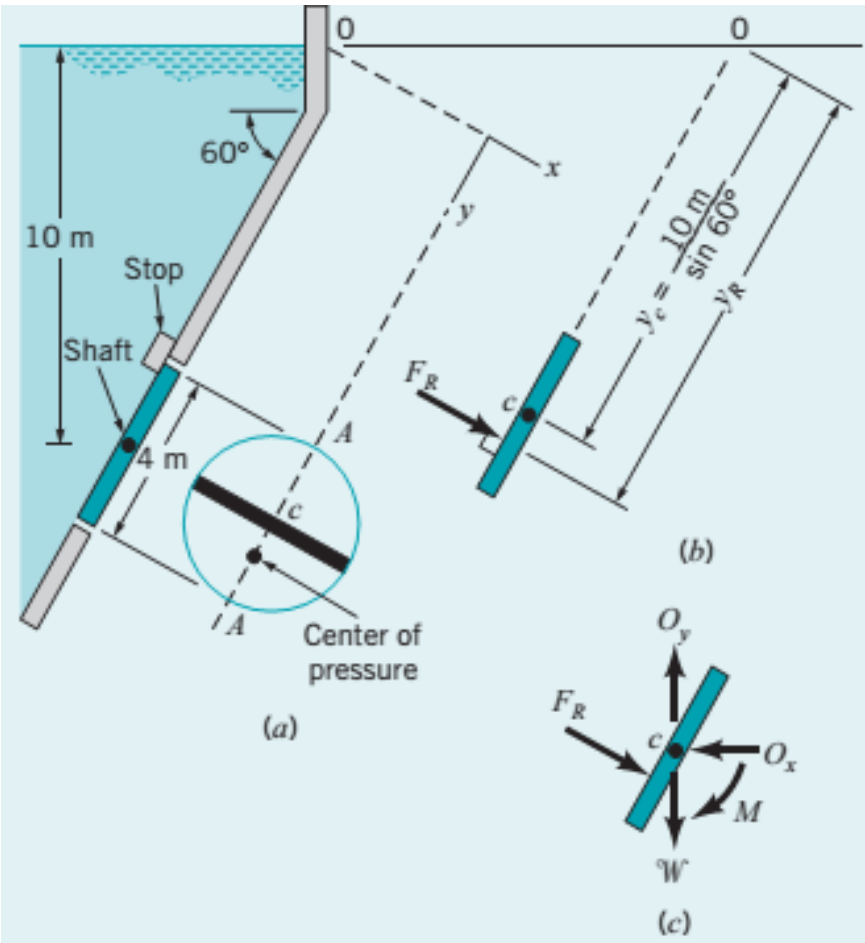
$$I_{xy} = -0.01647R^4$$

Se tienen agua y aceite en un manómetro. El aceite tiene gravedad específica de 0.8 y se desarrolla una $h_1 = 300$ mm, $h_2 = 200$ mm y $h_3 = 600$ mm. (a) Determine la diferencia de presiones en pascales. (b) Si $p_B = 50$ kPa y la lectura barométrica es de 730 mmHg, encuentre la presión en A en metros de agua absolutos.

La puerta triangular CDE de la figura está empotrada a lo largo de CD y se abre por una fuerza normal P aplicada en E. Arriba de ella se tiene aceite con $GE=0.8$ y se abre a la atmósfera en su lado inferior. Despreciando el peso de la puerta, encuentre (a) la magnitud de la fuerza ejercida en la puerta; (b) la ubicación del centro de presión; (c) la fuerza P necesaria para abrir la puerta.



Se tiene una puerta circular de 6 m de diámetro sobre la pared inclinada de un depósito con agua. La compuerta está montada sobre un brazo a lo largo del diámetro horizontal, mientras que la profundidad del agua sobre este brazo es de 10 m. Determine (a) La magnitud y localización de la resultante ejercida sobre la compuerta y (b) el momento que debe aplicarse para abrir la compuerta.



Flotación

En un cuerpo en flotación, un balance de fuerzas ocasiona que se cancelen algunas de las fuerzas en determinados ejes (como el x). De modo que el balance de fuerzas es

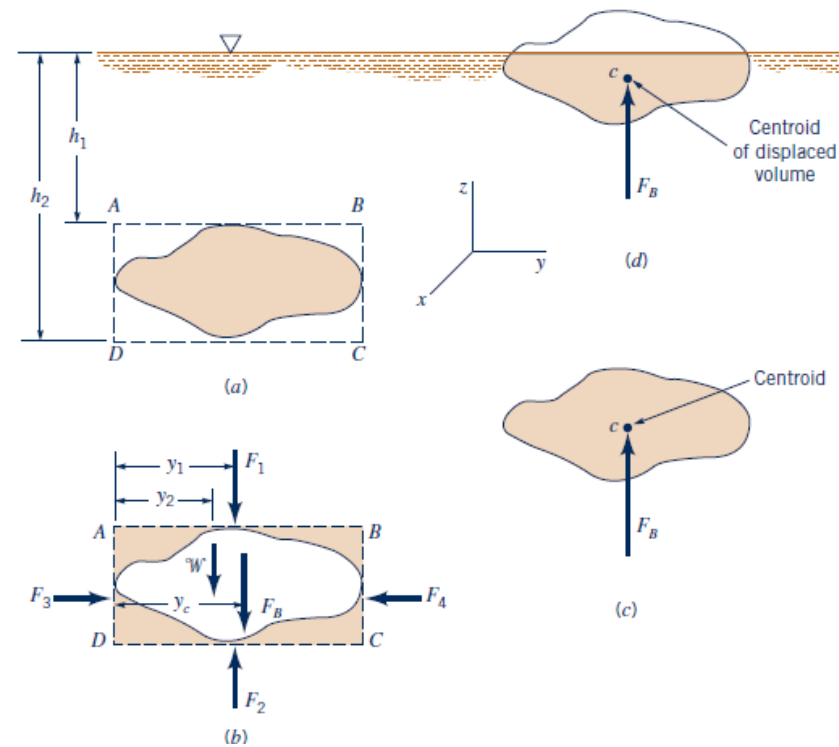
$$F_F = F_2 - F_1 - W$$

$$F_2 - F_1 = \rho g(h_2 - h_1)A$$

Y por tanto

$$F_F = \rho g(h_2 - h_1)A - \rho g[(h_2 - h_1)A - V]$$

$$F_F = \rho gV$$



Fenómenos de flujo de fluidos

Existen muchas definiciones para el flujo (turbulento, laminar; real, ideal; reversible, irreversible; rotacional, irrotacional). En la práctica, el flujo turbulento es el más común.

En el flujo turbulento, las partículas de fluido se mueven en trayectorias irregulares, lo que causa un intercambio de cantidad de movimiento a distancias mayores.

Fenómenos de flujo de fluidos

Descripción Euleriana

En este método se calcula la presión en el campo de flujo como función de la posición y el tiempo.

Descripción Lagrangiana

En este método se analizan los cambios que experimenta una partícula individual de fluido.

Campo de velocidad

La velocidad es un vector dependiente de la posición y el tiempo.

$$V(x, y, z, t) = iu(x, y, z, t) + jv(x, y, z, t) + kw(x, y, z, t)$$



V4.3 Cylinder-
velocity vectors



Se describen las propiedades de un fluido en términos de movimiento de las partículas de un fluido en lugar de moléculas individuales.

Se pueden obtener otras propiedades a partir de la velocidad (desplazamiento, aceleración, flujo volumétrico, velocidad de expansión volumétrica, velocidad angular).

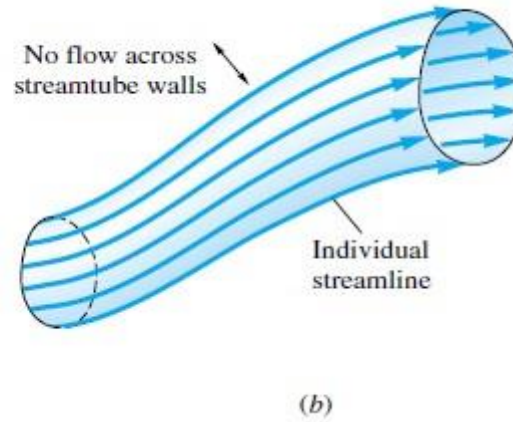
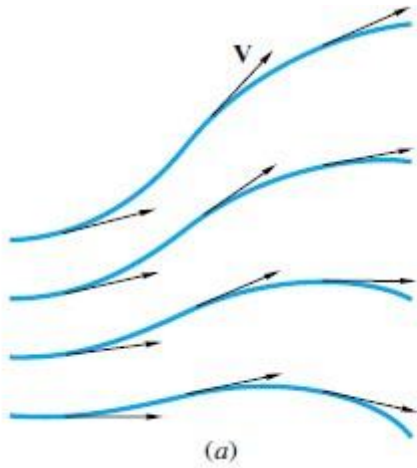
Fluye un fluido a través de una sección reductora. Se inserta un sensor de velocidad en un extremo (1) y se obtiene un valor constante de 1 m/s, mientras que en el extremo (2) se obtiene un valor de 3 m/s. Estime la aceleración cuando $\Delta x = 10$ cm.

En un fluido, la velocidad es la propiedad más importante, relacionándose con la presión, la densidad, la temperatura; además de la energía interna, entalpía, entropía y las capacidades caloríficas; inclusive coeficiente de viscosidad y coeficiente de conducción h.

Flujo unidimensional

Existen 4 tipos de patrones de flujo:

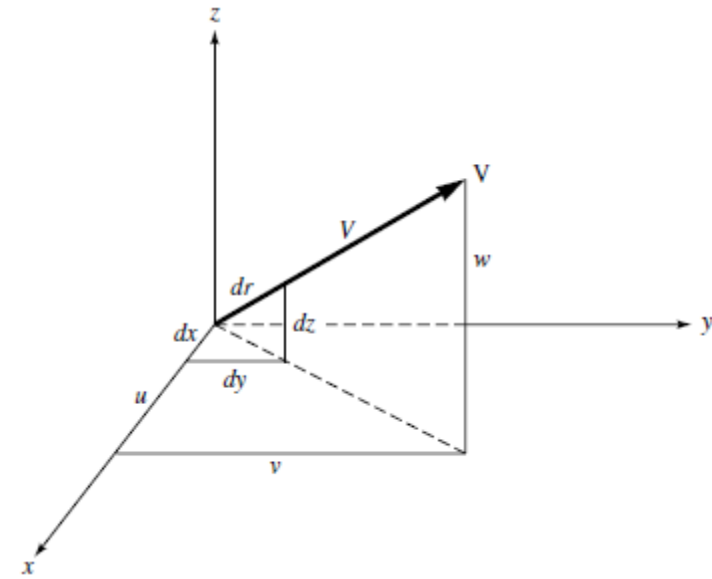
1. Una línea recta: Una línea de corriente es tangencial al vector de velocidad en un instante dado.
2. Una línea patrón: Describe el camino seguido por una partícula.
3. Línea de ataque: Describe la nueva posición de una partícula cuando ha pasado previamente por otro punto.
4. Temporal: Describe un conjunto de partículas que pasan por un punto en un intervalo dado.



Las líneas de corriente son siempre Tangenciales al flujo.

La ruta o patrón de las partículas

Puede calcularse por integración de las componentes de la velocidad.



En algunos casos el vector velocidad puede tener una sola componente, debido a que dos de ellas son despreciables.

$$\mathbf{V} = u\mathbf{i}$$

Existen muchos casos de aplicación en los que esta racionalización es aceptable.

El comportamiento de un fluido fluyendo depende de si existe o no interacción con superficies sólidas.

Existen regiones en las que no afecta la interacción del fluido con una pared, por lo tanto se pueden despreciar los efectos del esfuerzo al corte. En esa región el fluido se comporta de forma ideal: es incompresible y con viscosidad cero.

A este tipo de flujo se le conoce como flujo potencial y está descrito por las ecuaciones de conservación de energía y de masa.

El flujo potencial tiene dos características principales:

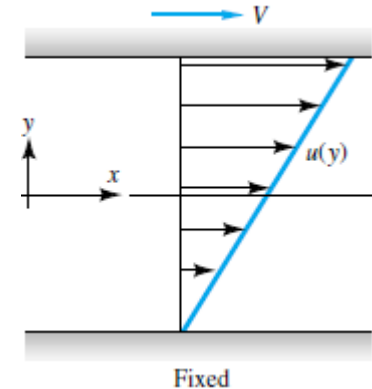
No existe formación de remolinos: flujo irrotacional.

No existe disipación de energía por fricción

Existe una región en la que se presentan los efectos de rozamiento debidos al contacto de la pared con el fluido, esta región es pequeña en comparación con la región de flujo potencial, excepto para movimiento de fluidos a bajas velocidades o por movimiento de fluidos de viscosidades elevadas.

Esta región, en la que existen los efectos del rozamiento, se le conoce como capa límite, Prandtl (1904) estableció la teoría de la capa límite para conocer los perfiles de esfuerzo y velocidad

En regiones distantes del sólido la velocidad es finita pero variable con la posición lo que genera un campo de velocidad (perfil de velocidad). Si en cada punto la velocidad del fluido no varía se le considera flujo estacionario.



Flujo laminar. El flujo laminar se presenta cuando los fluidos se mueven sin la existencia de mezcla lateral y las capas contiguas se deslizan unas sobre otras. La turbulencia se presenta cuando las láminas de fluido se destruyen para dar lugar a remolinos y mezcla lateral.

Campo de esfuerzo cortante. El campo de velocidad genera entre las capas de fluido un campo de esfuerzo cortante. El esfuerzo cortante está representado por:

$$\tau_{xy} = \frac{F}{A} \propto \frac{dV_y}{dx}$$

Fluidos newtonianos y no newtonianos. Las relaciones entre el esfuerzo cortante y el gradiente de velocidad en un fluido real constituyen el objeto de estudio de la reología. En la figura se muestran ejemplos del comportamiento reológico de los fluidos

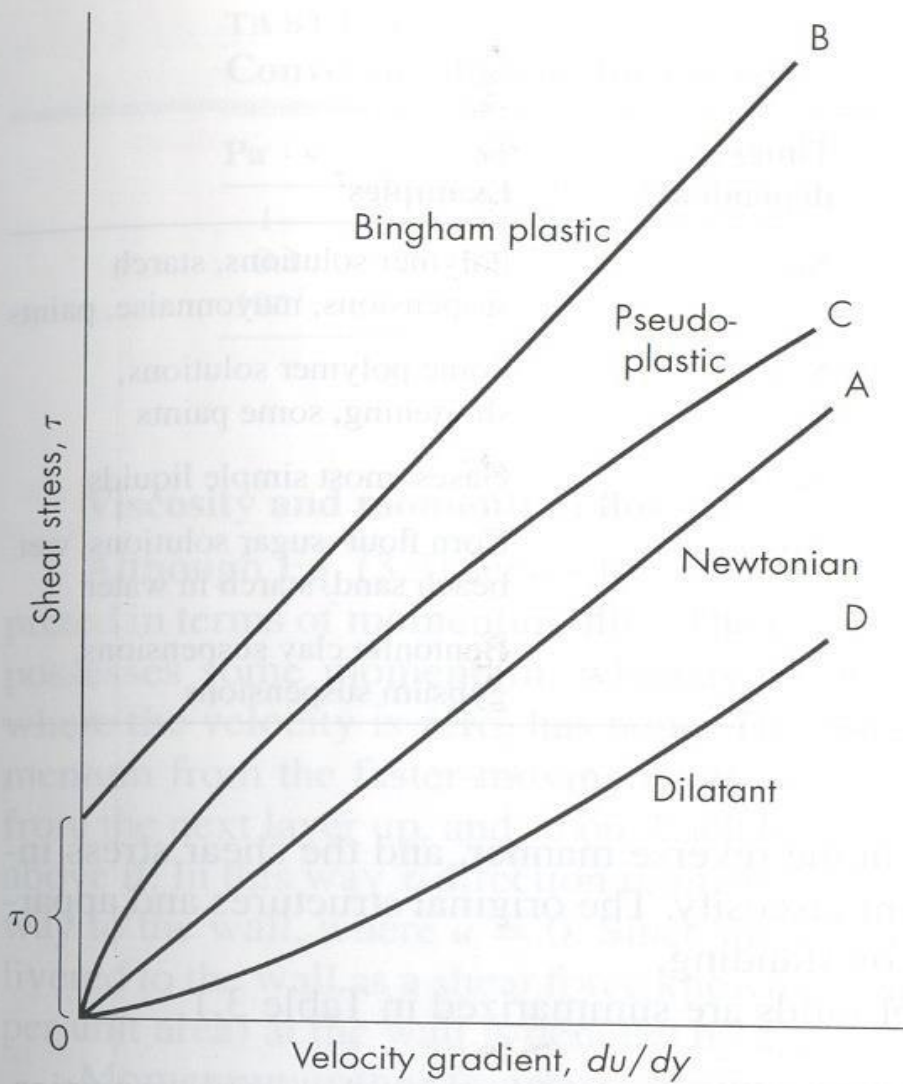


FIGURE 3.2
Shear stress versus velocity gradient
for newtonian and non-newtonian
fluids.

Viscosidad. En un fluido newtoniano el esfuerzo cortante es proporcional al gradiente de velocidad y la constante de proporcionalidad es la viscosidad.

Designación	Efecto del aumento del gradiente de velocidad	¿Dependiente del tiempo?
Pseudoplastico	Enrarece	No
Tixotropico	Enrarece	Si
Newtoniano	Ninguno	No
Dilatante	Espesa	No
Reopectico	Espesa	Si

Viscosidad cinemática. Con frecuencia resulta útil la relación entre la viscosidad absoluta y la densidad de un fluido, μ/ρ . Esta propiedad se denomina viscosidad cinemática y se representa por ν . Para distinguir de μ , a la primera se le llama viscosidad dinámica.

En el sistema cgs la viscosidad cinemática se denomina stoke (st) y corresponde a $1 \text{ cm}^2/\text{s}$

Factores de conversión

Turbulencia

- Un fluido puede circular por una tubería u otra conducción de dos formas diferentes. A bajas velocidades de flujo la caída de presión en el fluido es directamente proporcional a la velocidad del fluido, mientras que a velocidades elevadas dicha caída de presión aumenta mucho más rápidamente y, de forma aproximada, es proporcional al cuadrado de la velocidad.

- La distinción entre dos tipos de flujo fue inicialmente demostrada en un experimento clásico realizado por Osborne Reynolds en 1883.
- Reynolds encontró que el comportamiento de la vena coloreada mostraba claramente que el agua circulaba según líneas rectas paralelas y que el flujo era laminar.
- Al aumentar la velocidad de flujo se alcanzaba una cierta velocidad crítica, para la cual se difumina la vena coloreada y el color se distribuye uniformemente a través de toda la sección de la corriente de agua. Este tipo de movimiento corresponde al flujo turbulento.

- Reynolds estudio las condiciones para las que se produce el cambio de un tipo de movimiento a otro y encontró que la velocidad critica, para la que el fluido pasa de laminar a turbulento, depende de cuatro variables:
 - El diámetro del tubo
 - La viscosidad
 - La densidad
 - La velocidad lineal media del líquido.
 - Estos cuatro factores pueden combinarse formando un grupo

- Combinándose estas cuatro variables se forma un grupo:

$$N_{Re} = \frac{\rho DV}{\mu} = \frac{GD}{\mu}$$

Donde:

D = diámetro del tubo

v = Velocidad media del líquido

μ = viscosidad del liquido ρ = densidad del liquido

ν = viscosidad cinemática del liquido.

G = masa velocidad

La agrupación adimensional recibe el nombre de número de Reynolds.

$$\text{NRe} < 2100$$

$$2100 \leq \text{NRe} < 4000$$

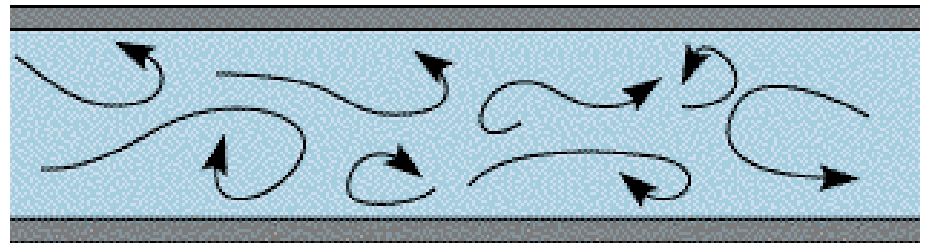
$$\text{NRe} \geq 4000$$

laminar

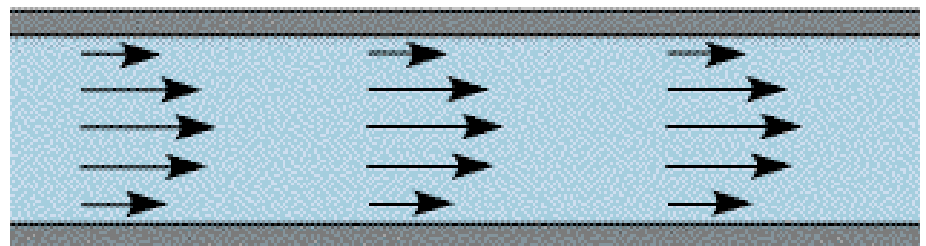
transición Tubo

turbulento

Turbulent



Laminar



Para fluidos de Ley de potencia

$$N_{\text{Re},n} = 2^{3-n'} \left(\frac{n'}{3n'+1} \right)^{n'} \frac{D^n \rho \bar{V}^{-2-n}}{K'}$$

$$N_{\text{Re},n} = 2100 \frac{(4n'+2)(5n'+3)}{3(3n'+1)^2}$$

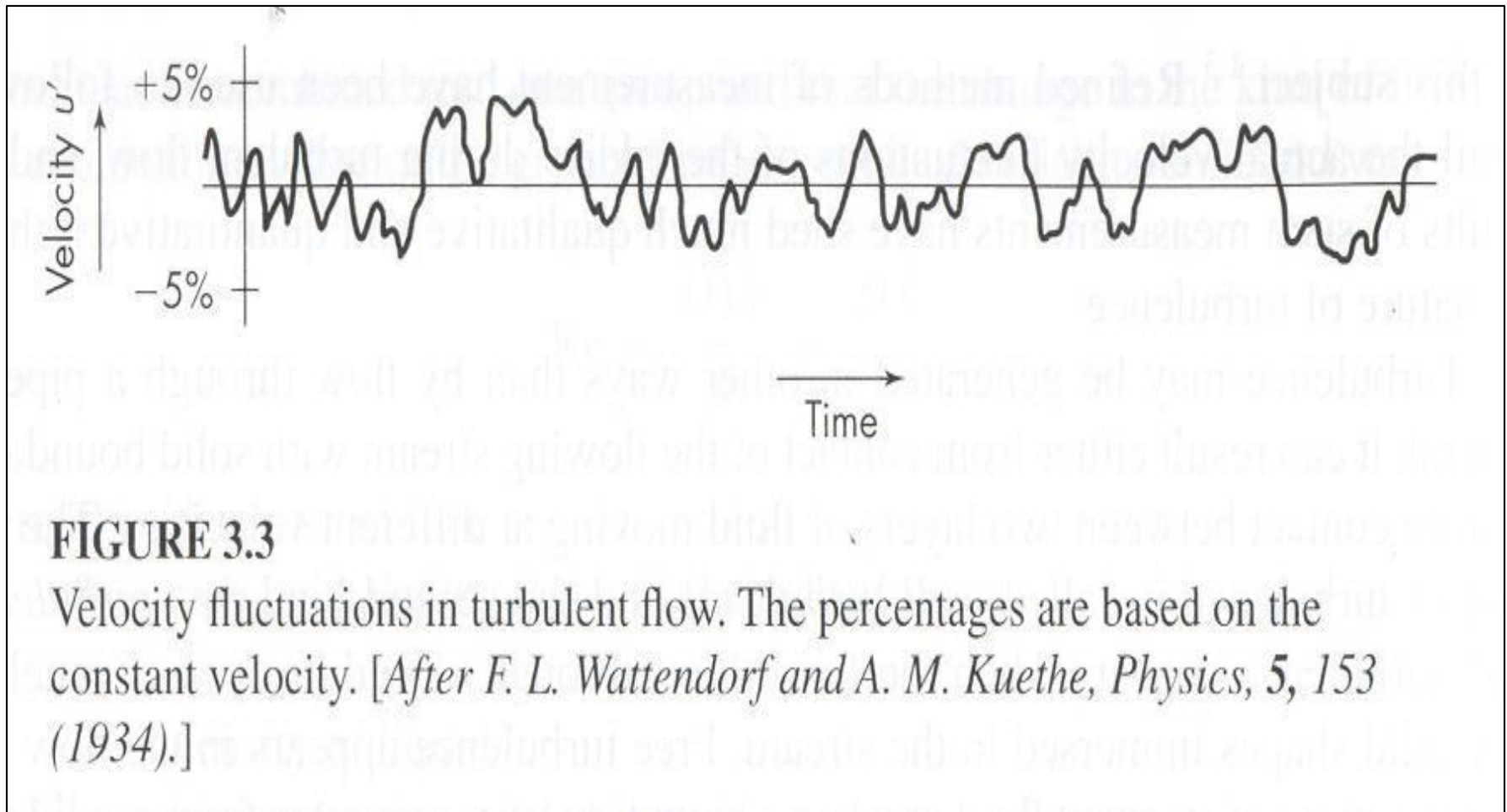
- Se han empleado métodos refinados de medida para estudiar con detalle las fluctuaciones reales de la velocidad de los torbellinos que tienen lugar en el flujo turbulento, y los resultados de las medidas han proporcionado mucha información cualitativa y cuantitativamente, sobre naturaleza de la turbulencia.
- La turbulencia puede originarse por turbulencia de pared y turbulencia libre.
 - **La turbulencia de pared** aparece cuando el fluido se mueve a través de canales cerrados o abiertos, o bien alrededor de formas sólidas sumergidas en la corriente.
 - **La turbulencia libre** se presenta en el flujo de un chorro dentro de la masa de un fluido estancado, o cuando una capa límite se separa de una pared sólida y se mueve a través de la masa global del fluido.

- El flujo turbulento consiste en un conjunto de torbellinos de diferentes tamaños que coexisten en la corriente del fluido. Continuamente se forman torbellinos grandes que se rompen en otros mas pequeños, a su vez se transforman en otros menores, los cuales finalmente desaparecen



El flujo dentro de un torbellino es laminar; el flujo turbulento no es un fenómeno molecular.

Fluctuaciones de velocidad en el flujo turbulento



Las ecuaciones de definición de las velocidades fluctuantes son

$$u_i = u + u' \quad v_i = v' \quad w_i = w'$$

u_i, v_i, w_i = componentes de la velocidad instantánea en direcciones x, y, z.

u = velocidad neta en dirección x

u', v', w' = fluctuaciones

v, w se omiten por hablar de flujo unidimensional.

Para la presión

$$p_i = p + p'$$

Debido a la naturaleza al azar de las fluctuaciones, los valores medios temporales de las componentes fluctuantes de velocidad y presión desaparecen al promediarlos para un periodo de tiempo del orden de unos pocos segundos.

Por tanto,

$$\frac{1}{t_0} \int_0^{t_0} u' dt = 0$$

$$\frac{1}{t_0} \int_0^{t_0} w' dt = 0$$

$$\frac{1}{t_0} \int_0^{t_0} v' dt = 0$$

$$\frac{1}{t_0} \int_0^{t_0} p' dt = 0$$

La razón para que estos valores medios se anulen reside en que para cada valor positivo de una fluctuación existe un valor negativo igual y la suma algebraica es cero.

Aunque los valores medios temporales de las componentes fluctuantes son cero, esto no tiene por qué ocurrir necesariamente para otras funciones o combinaciones de dichas componentes.

Por ejemplo, el valor medio temporal de la media cuadrática de una de cualquiera de estas componentes de velocidad no es cero. Esta magnitud para la componente u' esta definida por

$$\frac{1}{t_0} \int_0^{t_0} (u')^2 dt = \overline{(u')^2}$$

Capa Límite

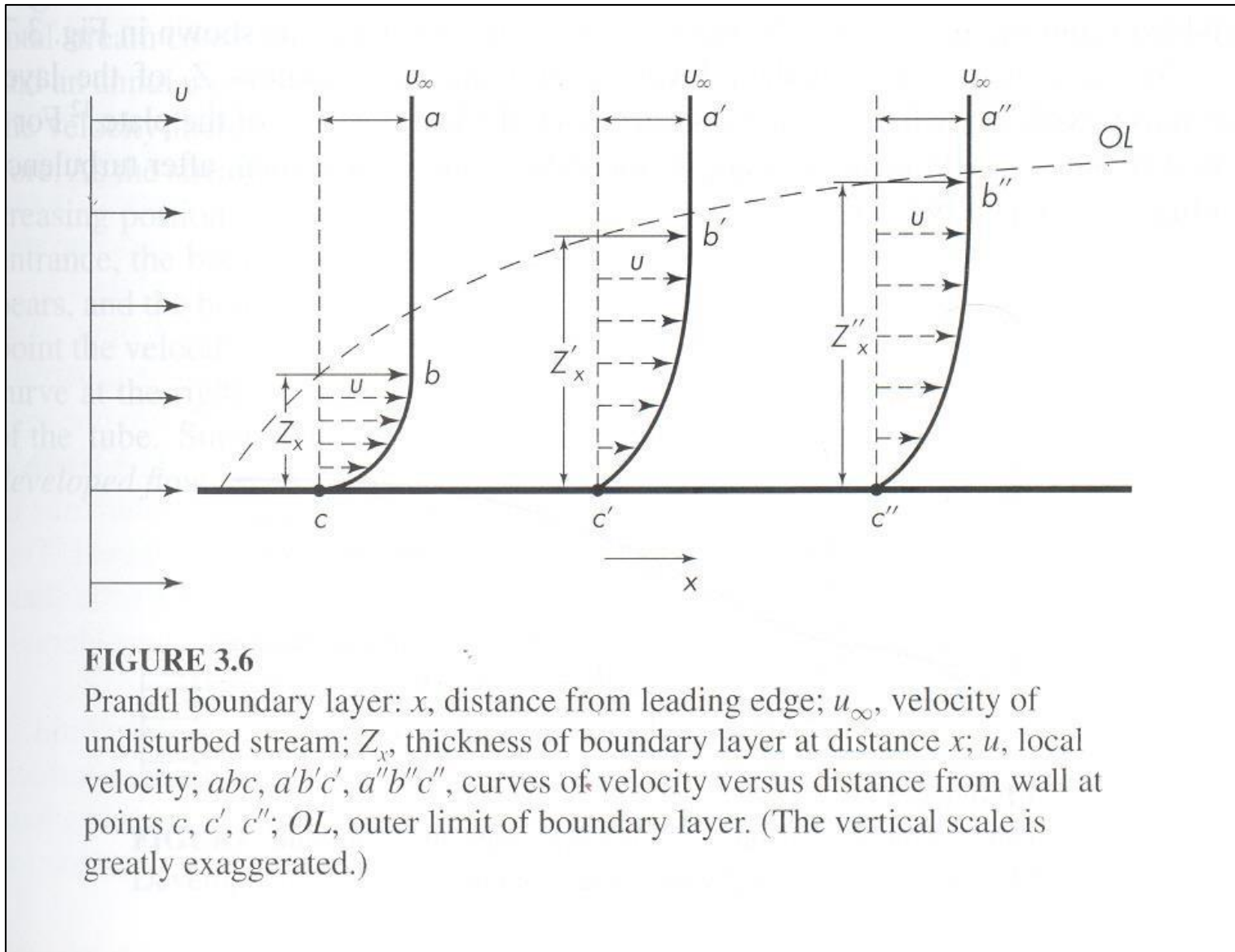


FIGURE 3.6

Prandtl boundary layer: x , distance from leading edge; u_∞ , velocity of undisturbed stream; Z_x , thickness of boundary layer at distance x ; u , local velocity; abc , $a'b'c'$, $a''b''c''$, curves of velocity versus distance from wall at points c , c' , c'' ; OL , outer limit of boundary layer. (The vertical scale is greatly exaggerated.)

- **Flujo en capas limite.** Una capa limite se define como una parte de un fluido en movimiento en la cual el flujo del fluido esta influenciado por la presencia de una superficie sólida.
- Se ha supuesto, con el fin de localizar en una forma definida la línea de trazos, que dicha línea pasa por todos los puntos donde la velocidad es el 99 por ciento de la velocidad global del fluido

- **Transición de flujo laminar a turbulento; Número de Reynolds.**

- Los factores que determinan el punto en el que aparece la turbulencia en una capa límite laminar están relacionados con el número adimensional de Reynolds definido por la ecuación

$$N_{\text{Re},x} = \frac{xu_{\infty}\rho}{\mu}$$

x = distancia desde el borde de ataque de la lamina.

u_{∞} = velocidad global del fluido.

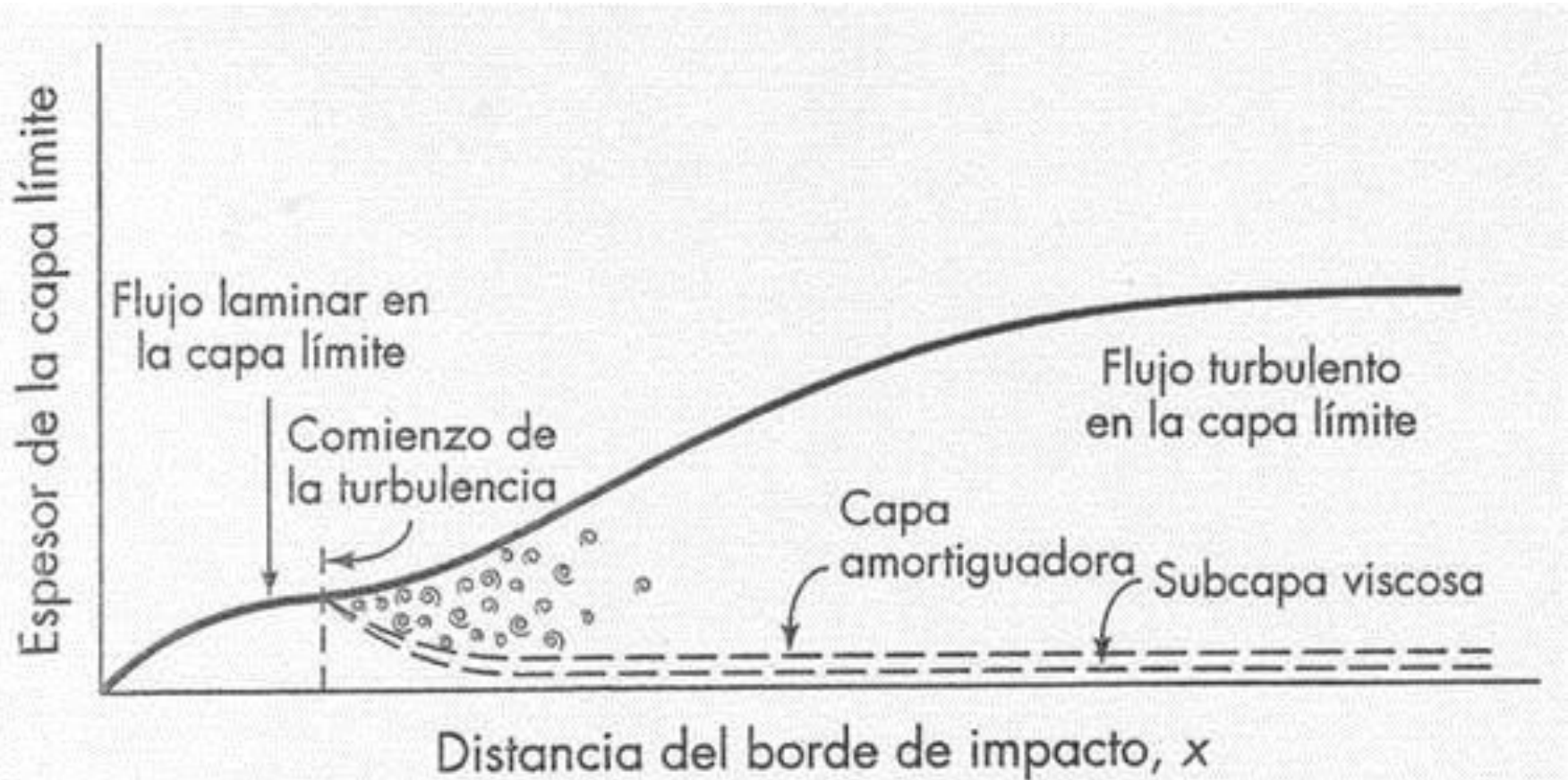
ρ = densidad del fluido.

μ = viscosidad del fluido.

El flujo muy próximo a la superficie es laminar.

Antes de la zona turbulenta existe una zona de transición.

El flujo muy próximo a la superficie es laminar. Antes de la zona turbulenta existe una zona de transición.



Formación de la capa límite en tubos rectos.

- Comienza a formarse una capa límite en la entrada del tubo, y a medida que el fluido circula a través de la primera parte de la conducción, el espesor de la capa aumenta. En la capa límite la velocidad aumenta desde cero en la pared hasta la velocidad constante existente en el núcleo.
- Finalmente, para un punto suficientemente alejado aguas debajo de la entrada, la capa límite llega al centro del tubo, el núcleo desaparece y la capa límite ocupa toda la sección transversal de la corriente.

Es este punto la distribución de velocidad en el tubo alcanza su forma final y ya que permanece inalterable en el resto de la longitud del tubo. Este flujo con una distribución de velocidad invariable recibe el nombre de *flujo totalmente desarrollado*.

Longitud de transición para flujo laminar y turbulento.

$$\frac{x_t}{D} = 0.05N_{\text{Re}}$$

x_t = longitud de transición

D = diámetro de la tubería.

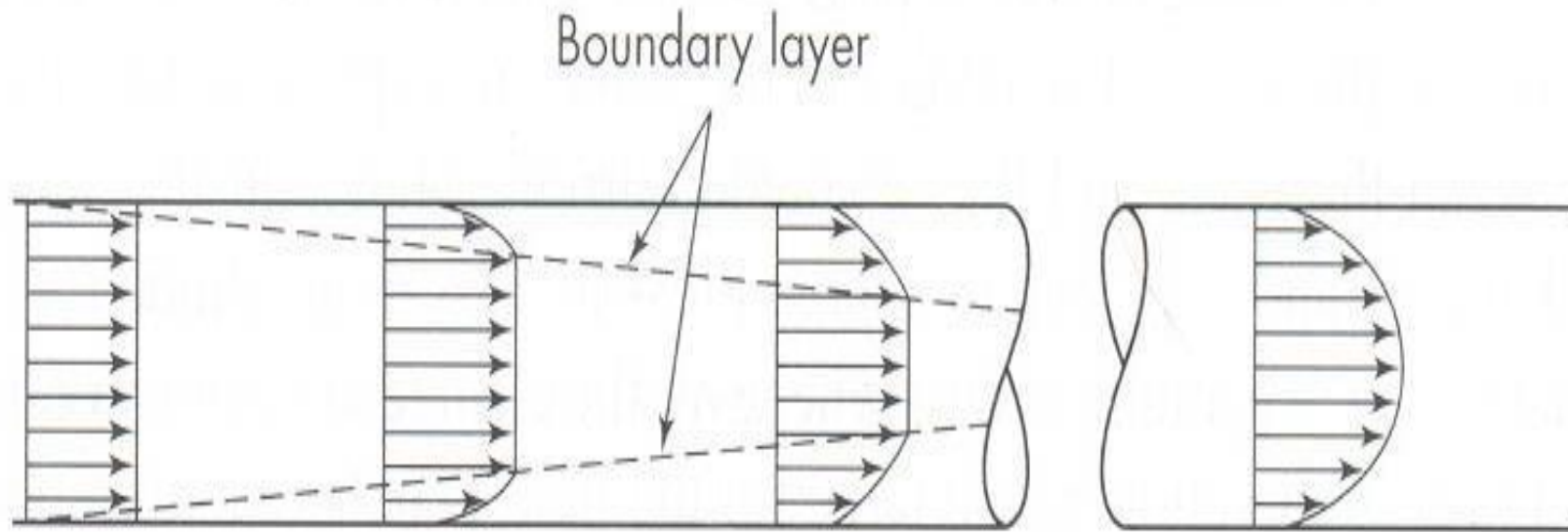


FIGURE 3.8

Development of boundary layer flow in pipe.

Ecuaciones de Mecánica de Fluidos

Ley de la viscosidad de Newton

$$\tau = \mu \frac{dv}{dy}$$

Fluido ideal es aquel que no tiene fricción y es incompresible.

En el flujo adiabático no hay transferencia de calor desde o hacia el fluido. Por tanto, cuando el flujo adiabático es reversible, se conoce como flujo *isentrópico*.

En el flujo a régimen permanente o estacionario, las propiedades del fluido no varían con el tiempo.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \frac{\partial p}{\partial t} = 0 \quad \frac{\partial T}{\partial t} = 0$$

Rotación: es la velocidad angular promedio que posee una partícula sobre un eje dado. Esto define al flujo rotacional. Cuando las partículas no tienen rotación, el flujo es irrotacional.

En el flujo unidimensional no se tienen variaciones transversales a la dirección de flujo principal. Esto establece condiciones de unidimensionalidad en casos específicos, por ejemplo, flujo a través de un tubo.

A este respecto, no puede haber flujo a través de las líneas de corriente. Estas líneas de corriente son tangenciales al flujo, por lo que se cumple

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}$$

Sistema y volumen de control

Un sistema puede ser un conjunto de partículas analizadas y se pueden cambiar las fronteras a voluntad de quien las analiza.

$$\frac{dm}{dt} = 0$$

Se puede aplicar la segunda ley del movimiento de Newton

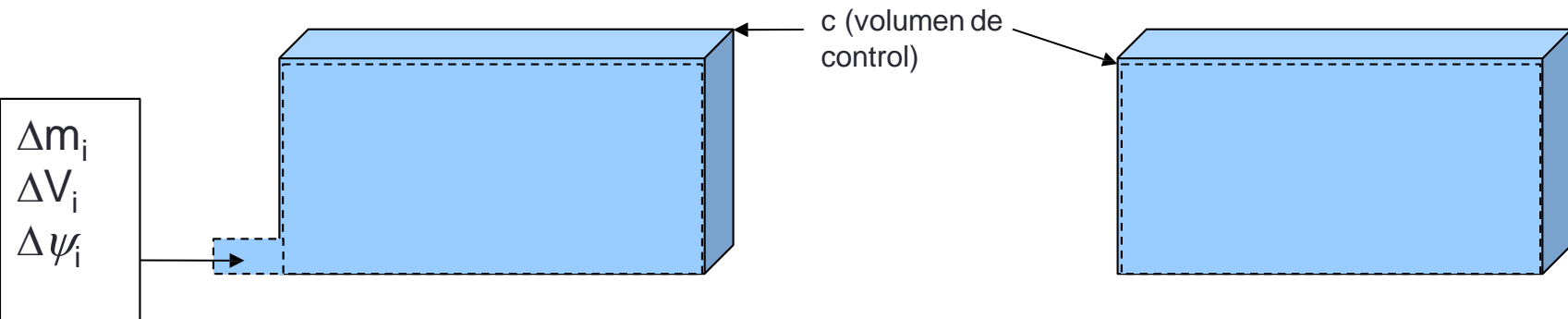
$$\sum F = \frac{d}{dt}(mV)$$

Un volumen de control es una región en el espacio en la que se analiza una propiedad. Su superficie es la *superficie de control*.

ECUACIÓN GENERAL DE BALANCE DE PROPIEDAD

La forma de expresar las leyes básicas de la TC y ecuaciones asociadas conduce a diferentes clases de soluciones.

Soluciones con independencia espacial.
Soluciones de forma integral y diferencial.



Al tiempo t , existe una fracción i del sistema que está fuera del volumen de control, con una masa Δm_i , un volumen ΔV_i , y propiedad específica $\Delta \psi_i$. La propiedad Ψ describe una propiedad de transporte del sistema. Por tanto, un cambio de propiedad entre t y Δt se describe como:

$$\Delta \Psi = \Psi|_{t+\Delta t} - \Psi|_t$$

Analizando y separando procesos, podemos decir:

$$\Psi|_{t+\Delta t} = \Psi_c|_{t+\Delta t}$$
$$\Psi|_t = \Psi_c|_t + \psi_i \Delta m_i$$

Aplicando estas ecuaciones sobre la primera, se tiene:

$$\Delta\Psi = \Psi|_{t+\Delta t} - \Psi|_t = \Psi_c|_{t+\Delta t} - \Psi_c|_t - \psi_i \Delta m_i = \Delta\Psi_c - \psi_i \Delta m_i$$

Se puede considerar en general una mayor cantidad de porciones del sistema que cruzan la frontera de control, por lo que se incorporaría una sumatoria en el último término de la ecuación ($\sum \psi_i \Delta m_i$). Solamente queda dividir la ecuación por el intervalo Δt en que se lleva a cabo el experimento, obteniendo la razón de cambio de propiedad, y llevándola al límite.

$$\frac{d\Psi}{dt} = \frac{d\Psi_c}{dt} - \sum_{i=1}^N \psi_i \frac{dm_i}{dt}$$

Para el caso de la masa ($\Psi = m$, $\psi_i = 1$) y teniendo en cuenta que para un sistema determinado la razón de cambio de masa es cero:

$$\frac{dm}{dt} = \frac{dm_c}{dt} - \sum_{i=1}^N 1 \frac{dm_i}{dt}$$
$$\frac{dm_c}{dt} - \sum_{i=1}^N \frac{dm_i}{dt} = 0$$

Para la 1a ley de la TD:

$$Q - W = \Delta E$$

Y en forma diferencial se tiene

$$\frac{dQ}{dt} - \frac{dW}{dt} = \frac{dE}{dt}$$

Q = adición de calor al sistema

W = trabajo efectuado **por** el sistema en el entorno

E = acumulación de energía en el sistema

Para la energía se considerarán las formas más comunes

$$E = \frac{mv^2}{2} + mgY + U$$

Si se introduce esta ecuación en la ecuación general de balance de propiedad ($\Psi = E$, $\psi_i = e_i$)

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dE_c}{dt} - \sum_{i=1}^N e_i \frac{dm_i}{dt}$$

Si se introduce esta ecuación en la 1a ley y se desglosan las contribuciones al trabajo (de flecha dW_f/dt , de flujo $P/\rho dm/dt$, y viscoso dW_μ/dt):

$$\frac{dQ}{dt} - \frac{dW_f}{dt} - \frac{dW_\mu}{dt} = \frac{dE_c}{dt} - \sum_{i=1}^N \left(e_i + \frac{P}{\rho} \right) \frac{dm_i}{dt}$$

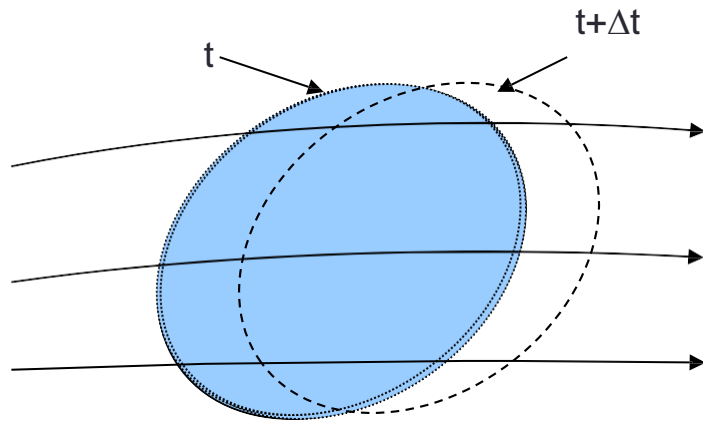
Formas de mosaico de la masa y 1a. ley:

$$\frac{dm_c}{dt} - \sum_{i=1}^N \frac{dm_i}{dt} = 0$$

$$\frac{dQ}{dt} - \frac{dW_f}{dt} - \frac{dW_\mu}{dt} = \frac{dE_c}{dt} - \sum_{i=1}^N \left(e_i + \frac{P}{\rho} \right) \frac{dm_i}{dt}$$

Formulación integral de las leyes básicas:

Se considera en este caso un volumen de control estacionario que cambia con el tiempo en una fracción de tiempo muy pequeña ($\Delta t \rightarrow 0$)



De acuerdo con este enfoque, existen regiones en el volumen de control que están siendo desocupadas por el sistema (salida) y ocupadas (entradas) por el sistema siguiente de manera continua. Por tanto, si deseamos conocer el cambio de propiedad del sistema, debemos referenciarlo al volumen de control. Mientras que el sistema se mueve continuamente en una dirección (positiva), el volumen de control está estacionario. Esto significa que las salidas en el volumen de control contribuirán al sistema viajante (positivas) y las entradas al volumen de control no contarán para el sistema (negativas).

La razón de flujo de propiedad Ψ del sistema es:

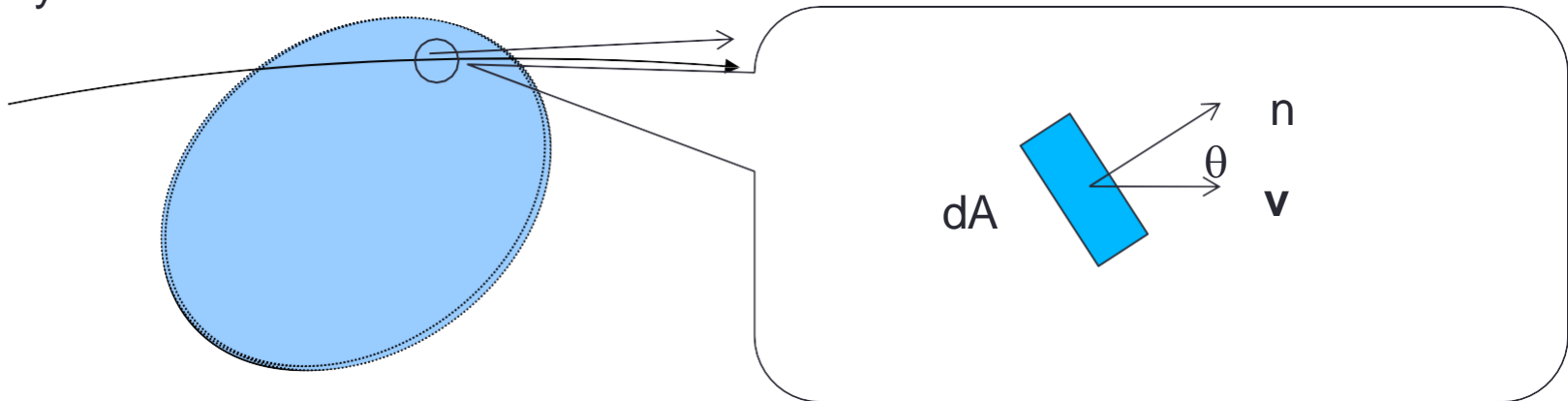
$$\frac{\Delta\Psi}{\Delta t} = \frac{\Delta\Psi_c}{\Delta t} + \frac{\Psi_s}{\Delta t} - \frac{\Psi_e}{\Delta t}$$

Aplicando el límite, se obtiene la razón de flujo de Ψ , y el volumen de control se hace igual al volumen del sistema.

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \Psi_c}{\Delta t} = \left(\frac{d\Psi}{dt} \right)_c = \frac{\partial}{\partial t} \int_c \psi \rho dV$$

$$\Psi = m\psi = \rho V\psi$$

Para obtener ecuaciones adecuadas de los dos últimos términos de la ecuación anterior, conviene analizar el volumen de control por entradas y salidas.



$$\text{Flujo de } \Psi = \psi(\rho \mathbf{v})(dA \cos \theta)$$

$$\psi(\rho \mathbf{v}) (dA \cos \theta) = \psi(\rho dA) [|\mathbf{v}| |\mathbf{n}| \cos \theta] = \psi \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA$$

Si se realiza una integral sobre toda la frontera (integral de la superficie de control)

$$\text{flujo de } \Psi = \int_{S_c} \psi \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA$$

Como resultado de la forma de integrar, se está tomando en cuenta el flujo hacia afuera y dentro del volumen de control; esto equivale a los dos últimos términos de la ecuación de razón de cambio de propiedad, por lo que al sustituir:

$$\left. \frac{d\Psi}{dt} \right|_{\text{sistema}} = \frac{\partial}{\partial t} \int_c \psi \rho dV + \int_{S_c} \psi \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA$$

Forma integral de la ecn, de transformación

La razón de cambio de una propiedad Ψ de un sistema es igual a **la razón de cambio de la propiedad Ψ del volumen de control** más la **razón neta de eflujo de la propiedad Ψ** por efecto del flujo de masa a través de las fronteras de control.

Para continuar con el análisis debe usarse una fórmula de conversión, que proporciona el teorema de la divergencia del cálculo vectorial.

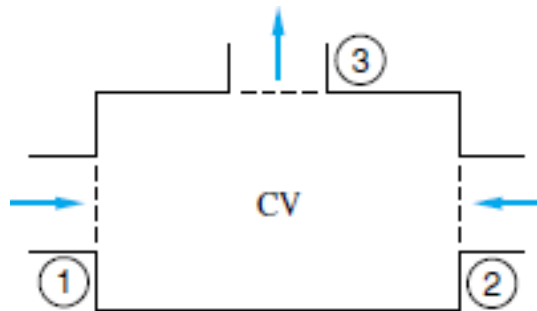
Para una cantidad vectorial \mathbf{K} y para un volumen V encerrado dentro de una superficie A , el teorema de la divergencia es:

$$\int_A \mathbf{K} \cdot \mathbf{n} dA = \int_V \nabla \cdot \mathbf{K} dV$$

Aplicando este teorema sobre la ecuación de transformación y resolviendo la integral, se obtiene la forma diferencial de la propiedad correspondiente

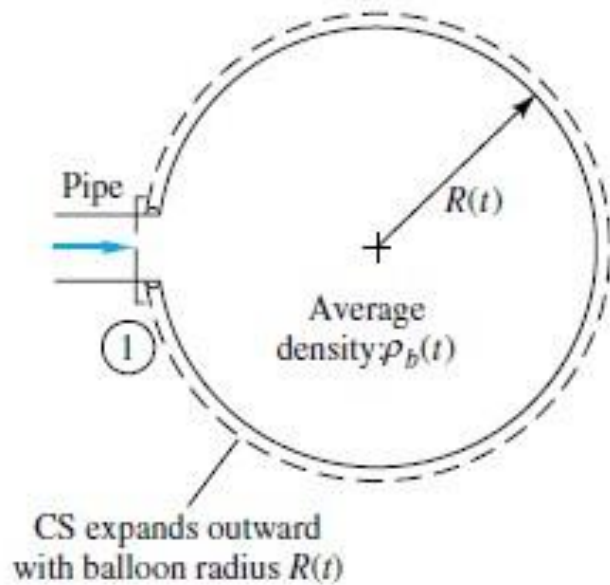
A fixed control volume has three one-dimensional boundary sections, as shown in the figure. The flow within the control volume is steady. The flow properties at each section are tabulated below. Find the rate of change of energy of the system which occupies the control volume at this instant.

Section	Type	ρ , kg/m ³	V , m/s	A , m ²	e , J/kg
1	Inlet	800	5.0	2.0	300
2	Inlet	800	8.0	3.0	100
3	Outlet	800	17.0	2.0	150





El globo de la figura se infla a través de la sección 1, en donde el área es A_1 , la velocidad es v_1 y la densidad del fluido es ρ_1 . La densidad promedio del globo es $\rho_b(t)$. Encuentre una expresión para la velocidad de cambio de masa del sistema dentro del globo en un instante dado.



Casos de análisis:

Formulación integral y diferencial para la conservación de la masa:

$$\Psi=m, \psi=1$$

Sustituyendo estas equivalencias en la forma integral de la ecuación de transformación:

$$\left. \frac{dm}{dt} \right|_{sist} = 0 = \frac{\partial}{\partial t} \int_c \rho dV + \int_{Sc} \rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA$$

Ahora, para obtener la forma diferencial, debe aplicarse el teorema de la divergencia a la ecuación anterior.

$$\int_{Sc} \rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA = \int_c \nabla \cdot \rho \mathbf{v} dV$$

$$\int_c \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{v} \right) dV = 0$$

Como el resultado de la integración es cero, el término entre paréntesis es cero:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{v} = 0$$

Ecuación de continuidad

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{v} = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

Se pueden agrupar los operadores diferenciales sobre la masa en un solo operador fundamental:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

En caso de que se tenga **flujo incompresible en régimen permanente**, esta ecuación se puede escribir:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

Ejemplo: La distribución de velocidad para un flujo incompresible bidimensional está dado por

$$u = -\frac{x}{x^2+y^2} \qquad v = -\frac{y}{x^2+y^2}$$

Demuéstrese que satisface la ecuación de continuidad.

Formulación integral y diferencial para la 1ª Ley de la Termodinámica:

$$\Psi = E, \quad \psi = e$$

Sustituyendo en la ecuación de transformación para la forma integral:

$$\left. \frac{dE}{dt} \right|_{sist} = \frac{\partial}{\partial t} \int_c e \rho dV + \int_{Sc} e \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA$$

Una vez que tenemos una ecuación para la variación de energía, se sustituye en la 1ª ley de la Termodinámica:

$$\frac{dQ}{dt} - \frac{dW}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_c e \rho dV + \int_{Sc} e \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA$$
$$P \frac{dV}{dt} = \frac{P}{\rho} \frac{d(\rho V)}{dt} = \frac{P}{\rho} \frac{dm}{dt}$$

Nuevamente se toman en cuenta las 3 componentes del trabajo, dW_f/dt , dW_μ/dt y $PdV/dt = P/\rho \, dm/dt$, siendo dm/dt la razón de flujo de masa que cruza la superficie de control. Ya que esto significa entradas y salidas del volumen de control, se expresa como ya se ha visto.

$$\frac{P}{\rho} \frac{dm}{dt} = \int_{S_c} \frac{P}{\rho} \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA$$

$$\frac{dQ}{dt} - \frac{dW_f}{dt} - \frac{dW_\mu}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_c e \rho dV + \int_{S_c} \left(e + \frac{P}{\rho} \right) \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA$$

Ecuación de la Cantidad de Movimiento Lineal

Si Ψ es la cantidad de movimiento $m\mathbf{v}$ y ψ es la cantidad de movimiento lineal por unidad de masa ($\rho\mathbf{v}/\rho$), entonces la ecuación de transformación es

$$\frac{d(m\mathbf{v})}{dt} = \sum F = \frac{\partial}{\partial t} \int_C \rho \mathbf{v} dV + \int_{S_C} \rho \mathbf{v} \mathbf{v} \cdot dA$$

Considérese la ecuación de continuidad con flujo a régimen permanente:

$$\left. \frac{dm}{dt} \right|_{sist} = 0 = \frac{\partial}{\partial t} \int_c \rho dV + \int_{Sc} \rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA$$

Esto significa que el primer término dependiente del tiempo es cero, y se cumple:

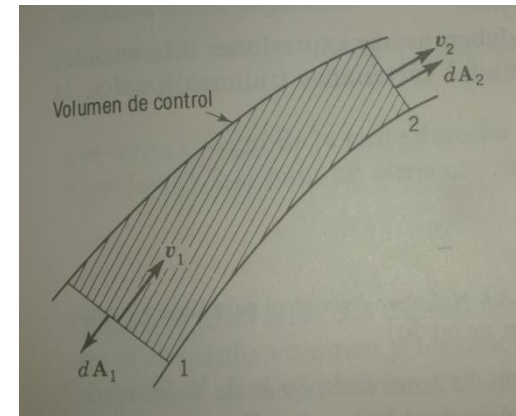
$$\int_{Sc} \rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA = 0$$

En un tubo de corriente se tiene entonces

$$\begin{aligned} \rho_1 v_1 dA_1 &= \rho_2 v_2 dA_2 \\ \dot{m} &= \rho_1 Q_1 = \rho_2 Q_2 \end{aligned}$$

Y la velocidad promedio es

$$\bar{v} = \frac{1}{A} \int v dA$$



Para el caso de flujo con densidad constante, ya sea permanente o transitorio:

$$\int_{sc} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} = 0$$

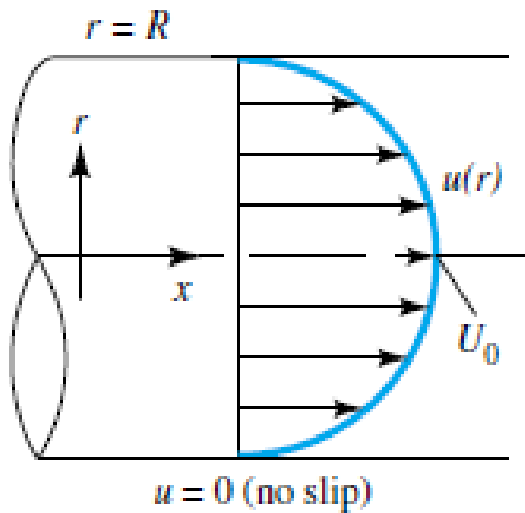
En la sección inicial de un sistema de tubos que lleva agua, la velocidad es de 3 ft/s y el diámetro es de 2 ft. En la sección 2 el diámetro es de 3 ft. Encuéntrese la descarga y la velocidad de la sección 2.



Para flujo viscoso estable a través de un tubo, el perfil de velocidad axial está dado aproximadamente por:

$$u = U_0 \left(1 - \frac{r}{R}\right)^m$$

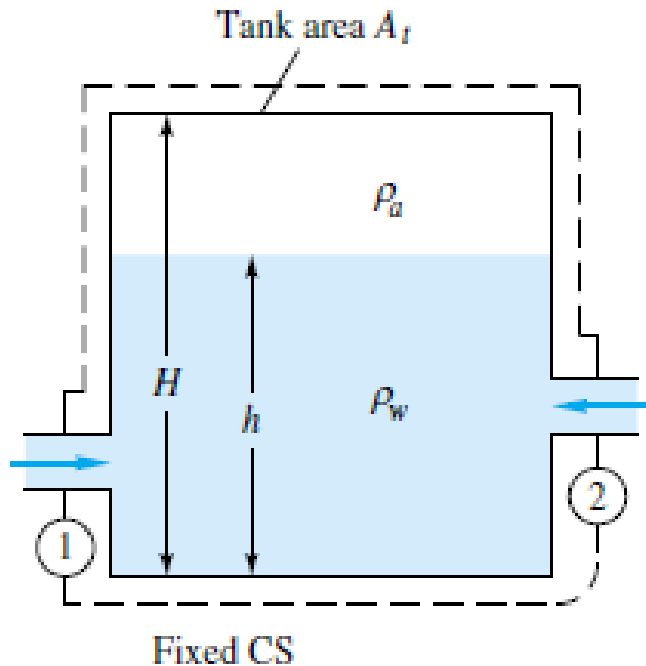
De tal manera que u varía desde 0 en la pared ($r=R$), hasta un máximo de U_0 en la línea central ($r=0$). Para el flujo altamente viscoso (laminar), se ha observado que $m=1/2$, mientras que para turbulento se observa $m=1/7$. Calcule la velocidad promedio si la densidad es constante.



$$\bar{v} = \frac{1}{A} \int u dA = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R U_0 \left(1 - \frac{r}{R}\right)^m 2\pi r dr$$

$$\bar{v} = U_0 \frac{2}{(m+1)(m+2)}$$

The tank in figure is being filled with water by two one-dimensional inlets. Air is trapped at the top of the tank. The water height is h . (a) Find an expression for the change in water height dh/dt . (b) Compute dh/dt if $D_1=1$ in, $D_2=3$ in, $V_1=3$ ft/s, $V_2=2$ ft/s, and $A_t=2$ ft², assuming water at 20°C.



Aplicando la ecuación de continuidad en ***flujo compresible estable***:

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0$$
$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0$$

Segunda Ley del movimiento de Newton

$$\frac{d(m\mathbf{v})}{dt} = \sum F = \frac{\partial}{\partial t} \int_c \rho \mathbf{v} dV + \int_{Sc} \rho \mathbf{v} \mathbf{v} \cdot dA$$

Observando estos términos, podemos **definirlos** como *las fuerzas que actúan sobre el cuerpo y sobre la superficie*.

Podemos establecer esta clase de fuerzas respectivamente como *el peso y el tensor de esfuerzo*. Éste último incluye tanto la presión como fuerzas viscosas.

Esto significa que

$$\sum F = \int_{Sc} \sigma \cdot n dA + \int_c \rho g dV = \int_c (\nabla \cdot \sigma + \rho g) dV$$

Podemos igualar las dos ecuaciones de la fuerza, reconociendo que en el equilibrio la suma de fuerzas debe ser cero:

$$\int_c \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{v}) + \nabla \cdot \rho \mathbf{v} \mathbf{v} \right] dV = \int_c (\nabla \cdot \sigma + \rho g) dV$$

Como el resultado de las integrales es el mismo, los integrandos se igualan.

$$\nabla \cdot \sigma + \rho g = \frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{v}) + \nabla \cdot \rho \mathbf{v} \mathbf{v}$$

Si reorganizamos

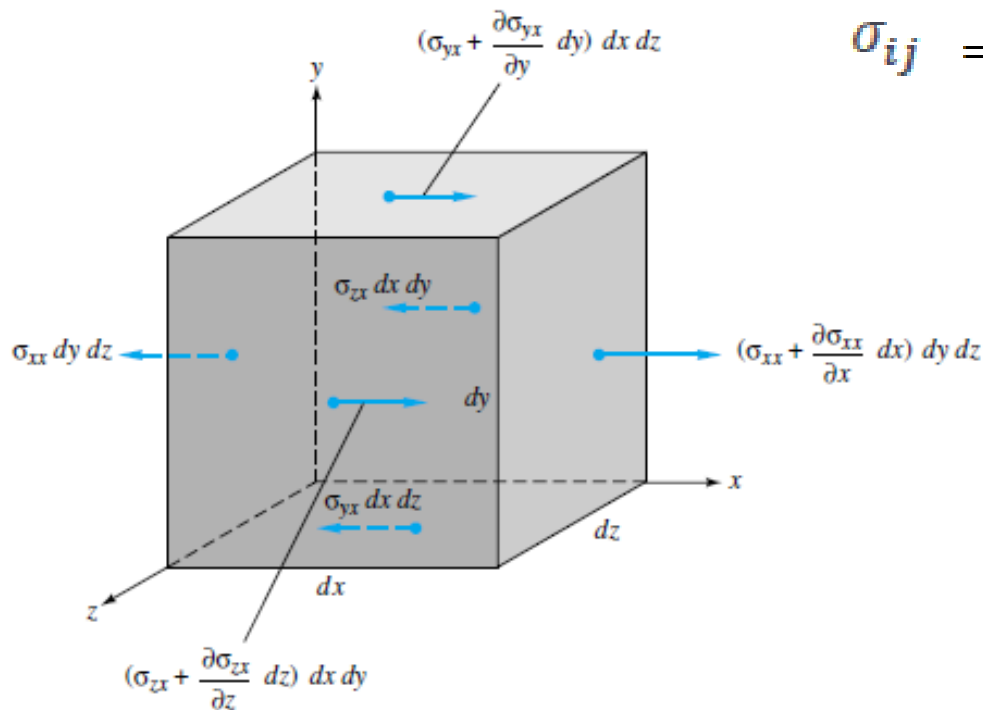
$$\nabla \cdot \sigma + \rho g = \mathbf{v} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{v} \right] + \rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right]$$

El primer término entre corchetes es la ecuación de continuidad, y es igual a cero.

$$\nabla \cdot \sigma + \rho g = \rho \frac{Dv}{Dt}$$

Los esfuerzos superficiales son el resultado de la presión y el rozamiento viscoso:

$$\sigma_{ij} = \begin{vmatrix} -p + \tau_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & -p + \tau_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & -p + \tau_{zz} \end{vmatrix}$$



Por tanto, el equilibrio de fuerzas sobre x puede expresarse como

$$dF_{x,S} = \left[\frac{\partial}{\partial x} \sigma_{xx} + \frac{\partial}{\partial y} \sigma_{yx} + \frac{\partial}{\partial z} \sigma_{zx} \right] dx dy dz$$

$$\frac{dF_{x,S}}{dV} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \tau_{xx} + \frac{\partial}{\partial y} \tau_{yx} + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{zx}$$

Éstas constituyen las componentes del vector Fuerza:

$$\frac{d\vec{F}_S}{dV} = -\nabla p + \frac{d\vec{F}_v}{dV}$$

Se observa que las fuerzas viscosas tienen nueve componentes.

$$\frac{dF_v}{dV} = \nabla \cdot \tau_{ij}$$

Si sustituimos estos tensores en la ecuación analizada se obtiene

$$\rho g - \nabla p + \nabla \tau_{ij} = \rho \frac{Dv}{Dt}$$

Esto significa que ***la suma de la fuerza de gravedad por unidad de volumen con la fuerza de presión por unidad de volumen y las fuerzas viscosas por unidad de volumen es igual a la densidad por la aceleración.***

Esta ecuación es **válida para cualquier tipo de fluido** en cualquier patrón de flujo.

Cuando la ecuación anterior se aplica para **fluidos incompresibles newtonianos en flujo laminar**, se obtiene la forma incompresible de la ecuación de **Navier-Stokes**

$$\rho g - \nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} = \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt}$$

Cuando los **efectos viscosos son despreciables (fluido invíscido)**, se obtiene la **ecuación de Euler**.

$$\rho g - \nabla p = \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt}$$

Una manera de escribir la ecuación de Euler (sin fricción, a lo largo de una línea de corriente y a régimen permanente) es:

$$\frac{dp}{\rho} + g dz + v dv = 0$$

La integración de la ecuación de Bernoulli para densidad constante produce

$$gz + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} = cte$$

Esta ecuación corresponde a una energía por unidad de masa.

$$z + \frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} = cte$$

Esta forma es conveniente para el estudio de líquidos con una superficie libre.

$$\rho gz + \frac{\rho v^2}{2} + p = cte$$

Esta forma es conveniente para flujo de gases, dado que el primer término se puede despreciar.

Cada uno de los términos de la ecuación de Bernoulli se puede ver como una forma de energía. Los tres términos en conjunto son la *energía disponible*.

Cuando la ecuación de Bernoulli se aplica a dos puntos sobre una línea de corriente:

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g}$$
$$z_1 - z_2 + \frac{p_1 - p_2}{\rho g} + \frac{v_1^2 - v_2^2}{2g} = 0$$

A través de un canal abierto fluye agua a una profundidad de dos metros y velocidad de 3 m/s. Después fluye hacia abajo por un canal de contracción dentro de otro canal, donde la profundidad es de 1 m y la velocidad de 10 m/s. Suponiendo un flujo sin fricción, determínese la diferencia en elevación de los pisos de los canales.

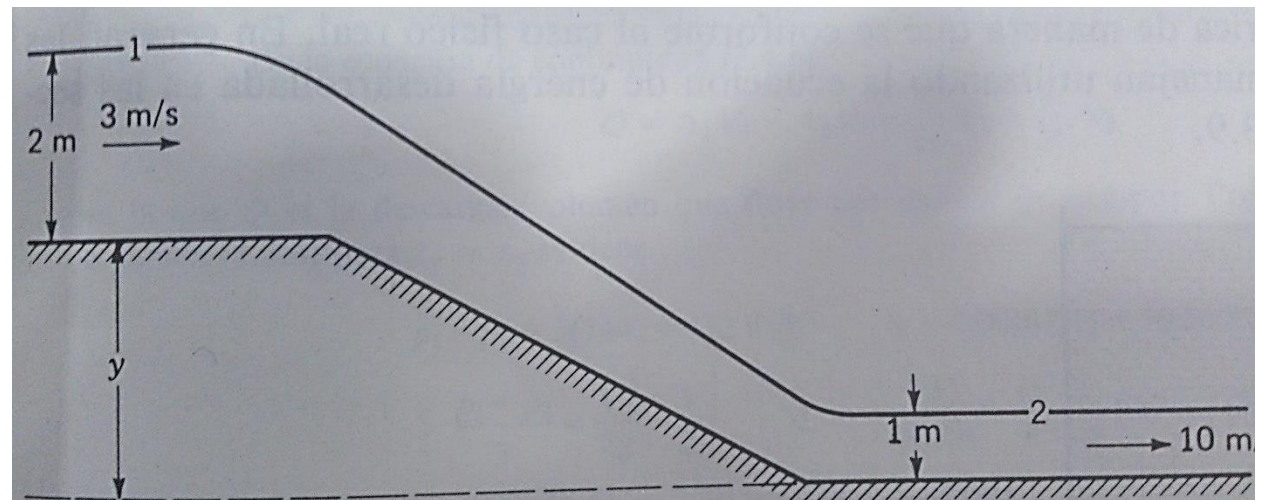
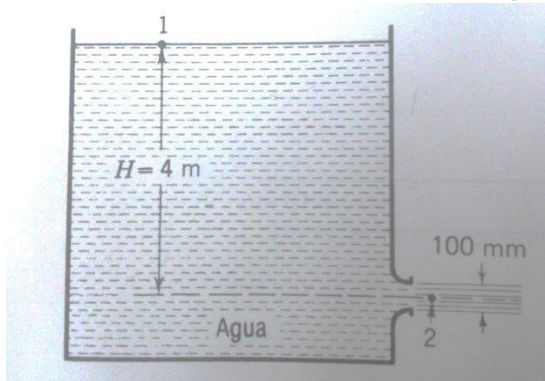


Figura 3.11 Flujo en canal abierto.

Aplicación de la ecn. De Bernoulli

- Cuando todas las líneas de corriente se originan en el mismo depósito.
- Cuando el cambio de presión es pequeño, un gas se puede considerar incompresible. Se usa un promedio de ρg .
- Para flujo en régimen no estacionario con condiciones gradualmente cambiante el error es pequeño.
- Para fluidos reales se puede aplicar la ecuación de Bernoulli obteniendo una aproximación teórica y aplicando luego un factor de corrección.

- Determínese la velocidad de salida en una boquilla instalada en la pared del depósito de la figura. Encuentre también la velocidad de descarga.



- Un medidor tipo Venturi se usa para determinar la velocidad de flujo de un tubo. El diámetro de la sección 1 es de 6 in y en la sección 2 es de 4 in. Encuéntrese la descarga por el tubo cuando $p_1 - p_2 = 3 \text{ lb/in}^2$. El aceite que fluye tiene una densidad relativa de 0.9.

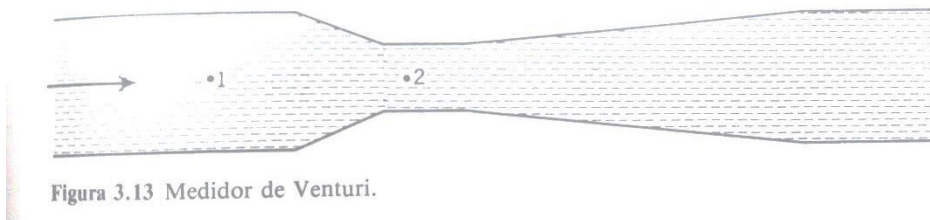


Figura 3.13 Medidor de Venturi.

Reversibilidad, Pérdidas

- Un proceso es reversible cuando puede regresar a su estado original sin cambios en el sistema o alrededores. Algunos factores que pueden impedir que un proceso sea reversible son: fricción viscosa, fricción de Coulomb, expansión no limitada, histéresis, etc.
- La irreversibilidad puede verse como la diferencia entre la cantidad de trabajo que una sustancia puede llevar a cabo a través de cambios reversibles con respecto al trabajo real a través del mismo proceso.
- Se denomina a veces trabajo perdido.
- La irreversibilidad es la transformación de energía disponible en energía térmica.

Una planta hidroeléctrica tiene una diferencia en elevación de la cabeza de agua al a cola de agua de $H=50$ m y un flujo $Q=5$ m³/s de agua a través de la turbina. El eje de la turbina rota a 180 rpm y el par torsional medido en el eje es de $T=1.16 \times 10^5$ N·m. El generador produce 2100 kW. Determinése (a) la potencia reversible para el sistema, (b) la irreversibilidad o pérdidas en el sistema, y (c) las pérdidas y la eficiencia de la turbina y el generador.

Uso de la ecuación de energía

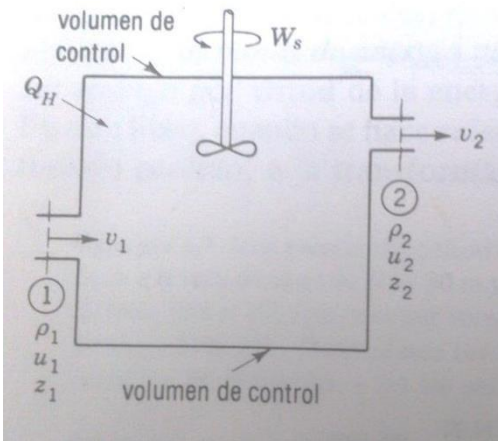
$$\frac{dQ}{dt} - \frac{dW_f}{dt} - \frac{dW_\mu}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_c e \rho dV + \int_{sc} \left(e + \frac{P}{\rho} \right) \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA$$

Aplicando la ecuación anterior a un volumen de control real con régimen permanente, se obtiene

$$\frac{dQ}{dt} + \left(\frac{p_1}{\rho_1} + gz_1 + \frac{v_1^2}{2} + u_1 \right) \rho_1 v_1 A_1 = \frac{dW_f}{dt} + \left(\frac{p_2}{\rho_2} + gz_2 + \frac{v_2^2}{2} + u_2 \right) \rho_2 v_2 A_2$$

$$q + \frac{p_1}{\rho_1} + gz_1 + \frac{v_1^2}{2} + u_1 = w_f + \frac{p_2}{\rho_2} + gz_2 + \frac{v_2^2}{2} + u_2$$

Ecn. De energía a régimen permanente a través de un volumen de control



La planta de enfriamiento de agua de un edificio grande está situada en un pequeño lago alimentado por una corriente de agua. El flujo de salida del lago es de $5 \text{ ft}^3/\text{s}$ a través de una compuerta. La temperatura de la corriente entrante es de 80°F . La tasa de flujo del sistema de enfriamiento es de $10 \text{ ft}^3/\text{s}$ y el intercambiador de calor del edificio eleva la temperatura del agua de enfriamiento en 10°F . ¿Cuál es la temperatura del agua de enfriamiento recirculada a través del lago, si no se consideran pérdidas a la atmósfera y al fondo del lago?

La ecuación de energía en forma diferencial a través de un tubo de corriente, en el que no se aplica trabajo, se convierte en:

$$\underbrace{\frac{dp}{\rho} + gdz + vdv}_{\text{Ecuación de Euler}} + \underbrace{du + pd\frac{1}{\rho} - dq}_{\text{Ecuación de 1ª. Ley}} = 0$$

$$dq = pd\frac{1}{\rho} + du$$

Mientras que

$$ds = \left(\frac{dq}{T}\right)_{rev}$$
$$Tds = du + pd\frac{1}{\rho}$$

Desigualdad de Clausius

$$ds \geq \frac{dq}{T}$$

$$Tds - dq \geq 0$$

$$d(\text{pérdidas}) \equiv Tds - dq$$

La ecuación de la energía $(q + \frac{p_1}{\rho_1} + gz_1 + \frac{v_1^2}{2} + u_1 = w_f + \frac{p_2}{\rho_2} + gz_2 + \frac{v_2^2}{2} + u_2)$ en forma diferencial es:

$$dw_f + \frac{dp}{\rho} + gdz + vdv + du + pd\frac{1}{\rho} - dq = 0$$

Y sustituyendo la desigualdad de Clausius y la segunda ley se obtiene

$$dw_f + \frac{dp}{\rho} + gdz + vdv + d(\text{pérdidas}) = 0$$

O integrando

$$\frac{v_1^2}{2} + gz_1 = \int_1^2 \frac{dp}{\rho} + \frac{v_2^2}{2} + gz_2 + w_f + \text{pérdidas}_{1-2}$$

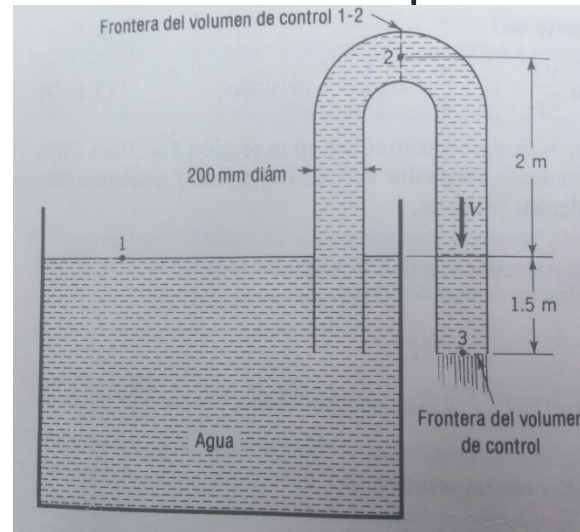
La ecuación anterior para fluidos incompresibles es

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + z_2 + \text{pérdidas}$$

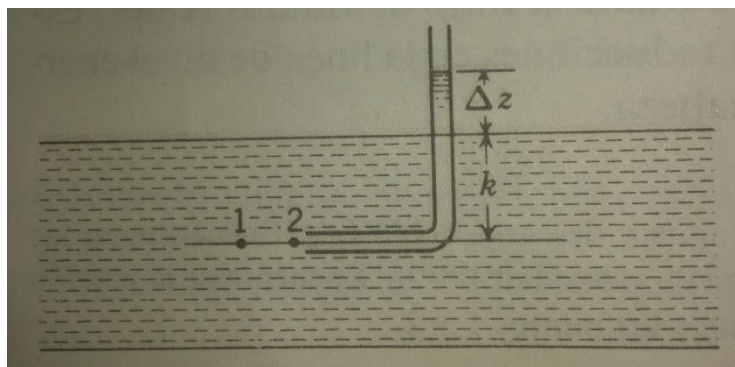
Las pérdidas pueden expresarse como una pérdida de cabeza (Δp) o como una pérdida de energía cinética ($K v^2/2g$).

La gráfica de los término $z + p/(\rho g)$ a lo largo de un tubo se conoce como cabeza piezométrica o línea de altura motriz. Esta energía disminuye a lo largo del tubo, lo que se conoce como *pérdidas de cabeza*.

Un sifón está lleno de agua y descarga a 150 L/s. Encuéntrense las pérdidas del punto 1 al 3 en términos de cabeza de velocidad $V^2/2g$. Encuéntrense la presión en el punto 2 si dos tercios de las pérdidas se dan entre los puntos 1 y 2.



El tubo de Pitot se usa para determinar la velocidad del líquido en el punto 1. El impacto del líquido contra la abertura 2 fuerza al líquido a elevarse hasta una altura Δz por encima de la superficie. Determínese la velocidad en 1.



Pérdidas en una expansión

En régimen permanente, incompresible y turbulento, se puede despreciar la fuerza cortante sobre la superficie. La cantidad de movimiento es:

$$p_1 A_2 - p_2 A_2 = \rho V_2 (V_2 A_2) + \rho V_1 (-V_1 A_1)$$

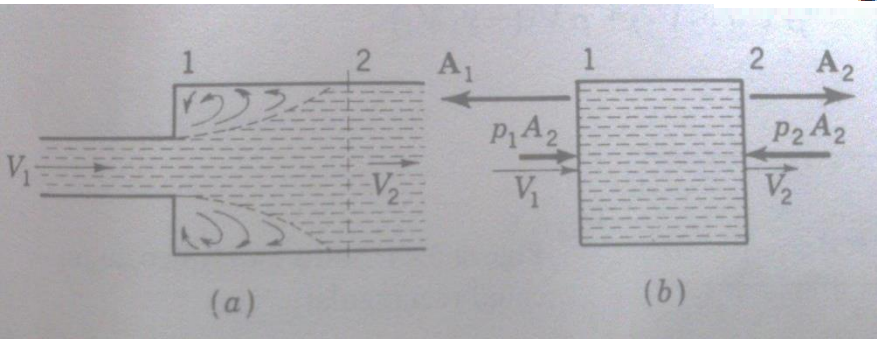
La ecuación de la energía es

$$\frac{V_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} = \frac{V_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + h$$

h representa las pérdidas debidas a la expansión.

Si se resuelve este sistema de ecuaciones, se obtiene para las pérdidas

$$h = \frac{V_1^2}{2g} \left(1 - \frac{A_2}{A_1} \right)^2$$



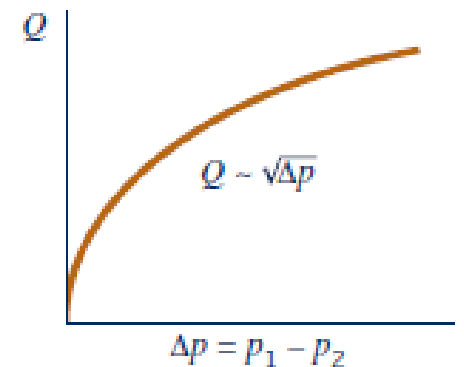
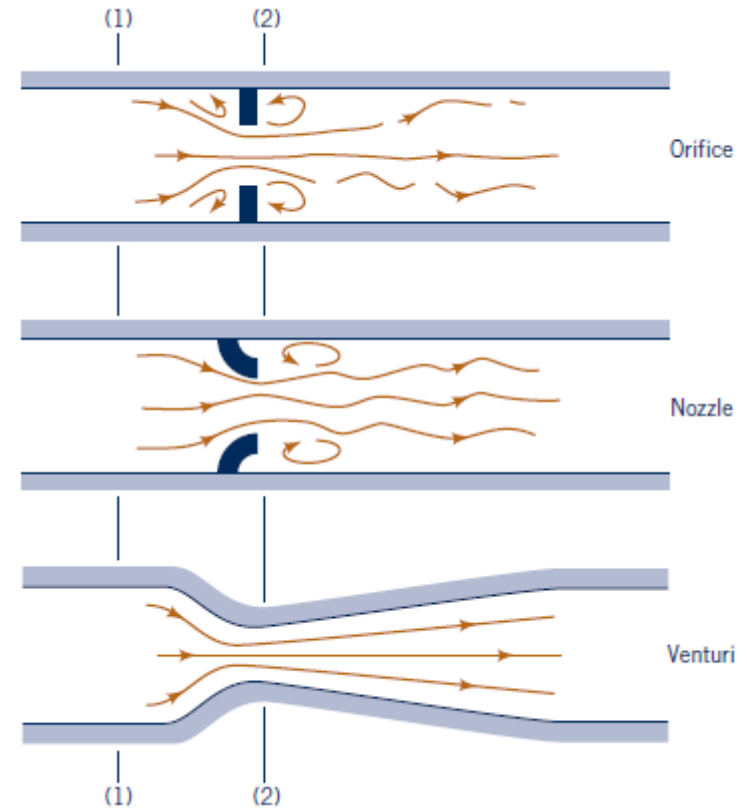
Medición de flujo

La ecuación de Bernoulli para estos dispositivos es:

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

Combinando con la ecuación de continuidad ($V_1 A_1 = V_2 A_2 = G$)

$$G = A_2 \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho[1 - (A_2/A_1)^2]}}$$



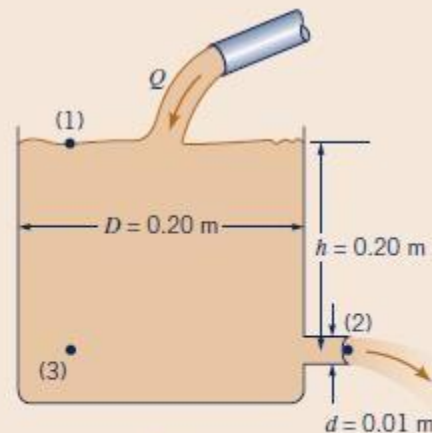
EXAMPLE 3.7 Flow from a Tank—Gravity Driven

GIVEN A stream of refreshing beverage of diameter $d = 0.01$ m flows steadily from the cooler of diameter $D = 0.20$ m as shown in Figs. E3.7a and b.

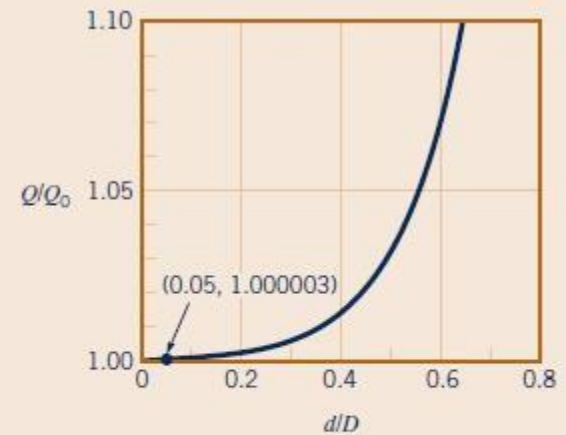
FIND Determine the flowrate, Q , from the bottle into the cooler if the depth of beverage in the cooler is to remain constant at $h = 0.20$ m.



(a)



(b)



(c)

■ Figure E3.7